

TOPIX の日次変化率の発生過程と ブル・ベア局面を持つマルコフ・スイッチング回帰モデル

中 川 裕 司

1. はじめに
2. 基本統計量と散布図
3. ジャンプ変数
4. 1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル
5. 2 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル
6. おわりに

1. はじめに

近年、不確実性を予測するために、(G)ARCH モデルにはじまるボラティリティ変動モデルが展開されてきているが、一方で、モデルの同定のために真のデータ発生過程を検出する検定を交えた方針が確立してきている。そこで本稿では、真の日次データ発生過程を検出した上で、(ジャンプ変数を持つ) 確率的に 2 状態に推移するマルコフ・スイッチング回帰モデルを使って、データの変化率および変化率の 2 乗値の推移過程を明らかにすることを目的とする¹⁾。

また、近年ティック・データや 1 分刻み・5 分刻みといった高頻度データの使用が可能になり、多くの研究者がこうした高頻度データを使った変化率の 2 乗 (realized volatility) を従属変数とした ARFIMA (小数過程 fractional processes あるいは AR Fractionally IMA) モデルやその一群のモデルの実証分析を行っている。しかしこうした高頻度データの入手には日本では高額な支出を伴い、一部の研究者や機関投資家だけが使用できるような状況になっている²⁾。そこで、本稿は一般投資家が無料で利用できる四本値データだけを使って、真のデータ発生過程を解明し、ジャンプ変数を持つマルコフ・スイッチング回帰モデルの推定を行い、TOPIX の変化率の推移を検証する³⁾。

次節では、夜間 (前日の終値から翌営業日の初値の) 変化率・日中 (当日の始値から当日の終値の) 変化率, Range (四本値の高値に対する安値の対数価格比), Upward Range (四本値の高値に対する始値との対数価格比), Downward Range (四本値の始値に対する高値との対数価格比) の基本統計量と時系列グラフを示す。3 節では、夜間・日中変化率, Upward Range, Downward Range に事後的なジャンプが存在したかの予備的検証を行う。最後に、ブル (上昇トレンド時

期) とベア (下降トレンド時期) の 2 種類のレジームを想定し, 変数を変化率および RV にしてジャンプ変数を含むマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定する。4 節では 1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定し, 5 節では 1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定する。両節とも説明変数にジャンプ変数および上方と下方の各ジャンプ変数の有無によって推定を行う。

夜間変化率 (日中変化率) のボラティリティモデルは 1 期前の日中変化率 (夜間変化率) のボラティリティが推移するモデルが選択される。また, ジャンプ変数を Upward Range と Downward Range に分けて説明変数に加えたマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定した結果, 夜間変化率 (日中変化率) のボラティリティ変動モデルは 1 期前の日中変化率 (夜間変化率) のボラティリティが推移するモデルが選択された。よって, ボラティリティは上下に推移変動していると想像される。

2. 基本統計量と散布図

まず, r_{ot} を第 t 日の夜間変化率, r_{dt} を第 t 日の日中変化率, r_{hlt} を第 t 日の高値と安値の対数値の差 (Range), r_{upt} を第 t 日の Upward Range, r_{dwt} を第 t 日の Downward Range としてそれぞれ(1)のように定義する。

$$\begin{aligned} r_{ot} &= \ln \left(\frac{p_t^{open}}{p_{t-1}^{close}} \right), & r_{dt} &= \ln \left(\frac{p_t^{close}}{p_t^{open}} \right) \\ r_{hlt} &= \ln \left(\frac{p_t^{\max}}{p_t^{\min}} \right), & r_{upt} &= \ln \left(\frac{p_t^{\max}}{p_t^{open}} \right), & r_{dwt} &= \ln \left(\frac{p_t^{open}}{p_t^{\min}} \right) \end{aligned} \quad (1)$$

ここで, p_t^{open} は第 t 日の始値, p_t^{close} は第 t 日の終値, p_t^{\max} は第 t 日の高値, p_t^{\min} は第 t 日の安値を表し, $t-1$ は第 t 日の 1 営業日前を示す。

データは Yahoo ファイナンスを使って, バブル崩壊後の TOPIX の 1991 年 1 月 4 日から 2009 年 9 月 30 日の 4,615 の四本値を使用した⁴⁾。

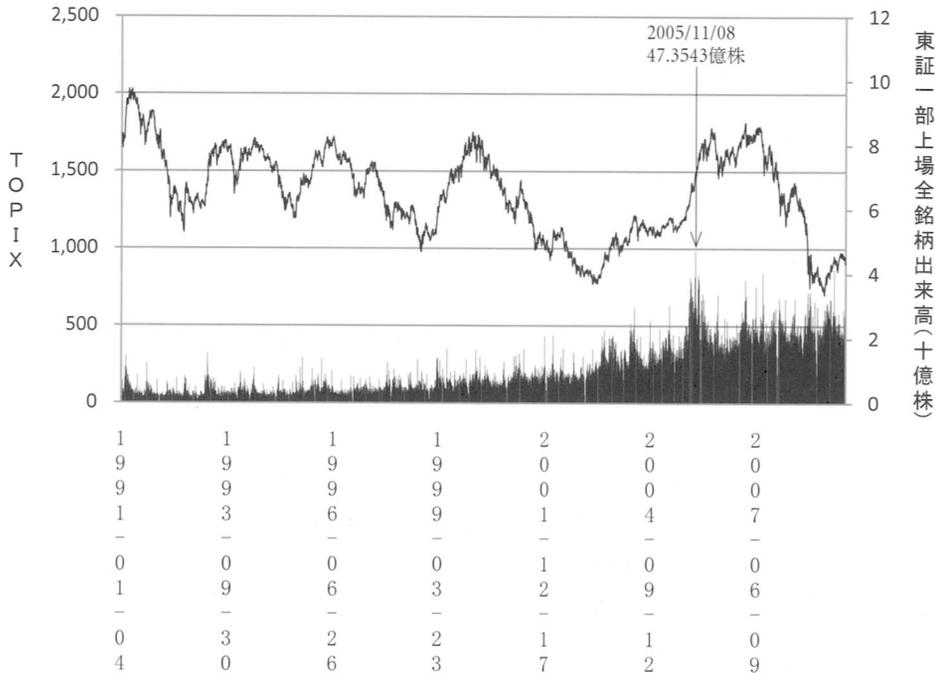
表 1 は(1)の変化率の基本統計量を示し, 日中変化率のゼロ仮説検定は有意水準 5% で棄却されず, 夜間変化率のゼロ仮説検定は有意水準 1% で棄却され, 夜間変化率と日中変化率との平均値の差の検定は有意水準 1% (p 値は 2.48448×10^{-5}) で棄却された。また, 日次変化率と Range, Upward Range と Downward Range の平均値の差の検定は有意水準 1% (p 値は 2.40952×10^{-9}) で棄却された。バブル以降, 日次変化率が有意水準 1% で負に有意にもかかわらず, 夜間変化率が有意水準 1% で正に有意で, かつ日中変化率が負に有意ではなかったことから, 概して, 夜間に海外でのグッドニュースが TOPIX の始値を前営業日の終値よりも高く引き上げ, 日本国内の

表1 基本統計量

	r_{ot}	r_{dt}	$r_{ot} + r_{dt}$	r_{upt}	r_{dwt}	r_{hlt}
標本平均 ^{a)}	0.03138**	-0.0141	-0.0453**	0.620729**	0.716726**	1.337455**
標準誤差	0.00673	0.02007	0.01692	0.010921	0.011789	0.012626
中央値 (メジアン)	0.03884	-0.0131	-0.0439	0.40352	0.4992	1.129462
標本標準偏差	0.45666	1.3626	1.1488	0.741444	0.800376	0.857191
標本分散	0.20853	1.85667	1.31975	0.54974	0.640602	0.734776
尖度	1.49518	5.5215	6.64577	19.63891	14.18047	15.49522
歪度	-0.1876	-0.0722	0.08159	3.051454	2.775708	2.874818
範囲	4.07129	22.8717	19.692	11.28479	8.785505	11.07899
最小	-2.2183	-10.007	-8.4365	0	0	0.205801
最大	1.85297	12.8646	11.2555	11.28479	8.785505	11.28479
合計	144.615	-64.89	-209.02	2860.939	3303.389	6164.328
標本数	4608	4608	4609	4609	4609	4609
P 値	3.2E-06	0.483	0.00739	0	0	0
信頼区間 (95%) の上限	0.01819	-0.0534	-0.0785	0.599318	0.693613	1.312701
信頼区間 (95%) の下限	0.04457	0.02527	-0.0122	0.64214	0.739839	1.362208

a) ** はゼロ仮説検定が1%で棄却できるものを表す。

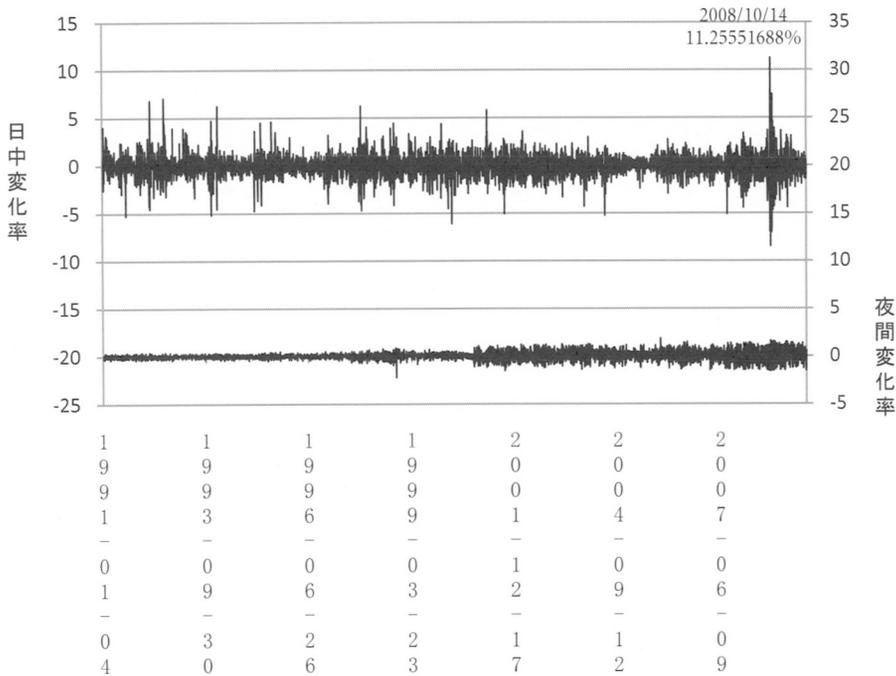
図1 TOPIX (終値) と東証一部上場出来高



デフレーションによって、1日の取引中には値が下落していったことを示している。

図1には、分析期間中のTOPIXの指数値と東証一部上場の出来高の時系列を示した。表1の日次変化率の標本平均がマイナスを示したように、図1のTOPIXの推移は期間中、負のトレン

図2 日中変化率と夜間変化率 (%)



ドを示している。また、2000年以降、東証一部上場全銘柄の出来高の推移は徐々に持ち直してきているように見られる。図1中で最大の出来高だった2005年11月8日はデイトレーダーによる回転売買が出来高を急増させたようだ。

夜間変化率と日中変化率の時系列を図2に、日次変化率とRangeを図3に、Upward RangeとDownward Rangeを図4に、日中変化率と夜間変化率のReal Jumpを図5に示した。

期間中、図2の1998年10月26日(月)の夜間変化率の最大の下落と図5の夜間変化率のReal Jumpの最大の上昇は10月23日(金)に日本長期信用銀行が金融再生法に基づいて特別公的管管理を政府に申し出たことが影響していると考えられる。2005年11月2日(水)は前日1日午前中に東証の大規模なシステム障害があり、2日の東京株式市場では東証一部の売買代金が急拡大したためであったと考えられる。

図2から図4の日中変化率と日次変化率とUpward Rangeの最大の上昇は2008年10月14日(火)であり、12日(日)にG7がワシントンで行われ、まとめられた行動計画に基づき、金融支援策を相次いで打ち出した好情報によって、日中変化率が急上昇したものと考えられる。また、図2と図3の日中変化率と日次変化率の最大の下落と図3のRangeと図5の日中変化率のReal Jumpの最大の上昇率は2日後の10月16日(木)であった。これは前日のニューヨーク市場での不況警戒で21年ぶりに下落したことが原因であると考えられる。図4のDownward Rangeの最大の上昇は2000年4月17日(月)であり、14日(金)のニューヨークのダウ工業株価指数の5.66%の下落が影響したものと考えられる。

図3 日次変化率と Range (%)

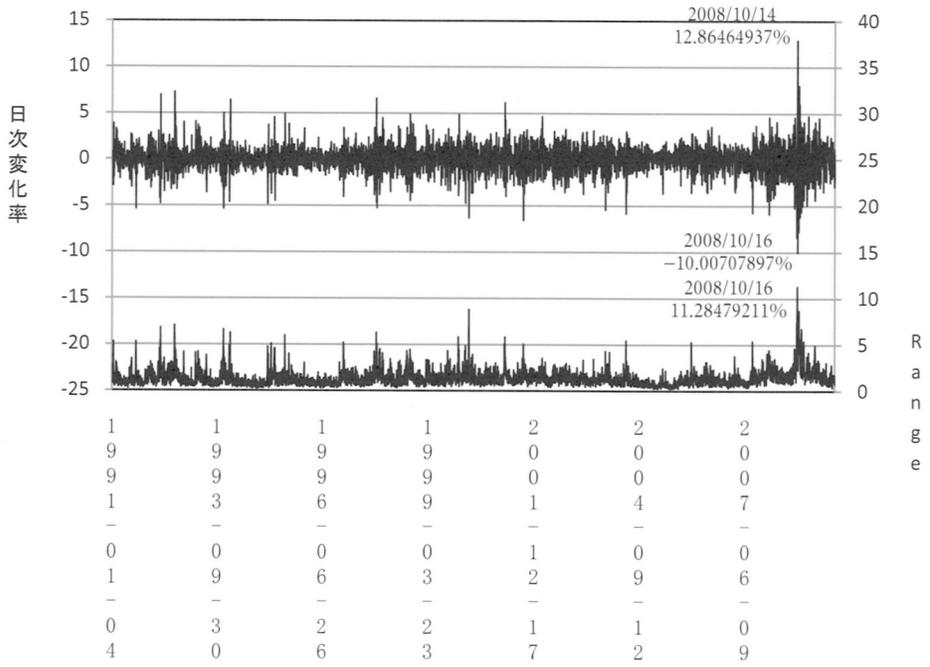


図4 Upward/Downward Range (%)

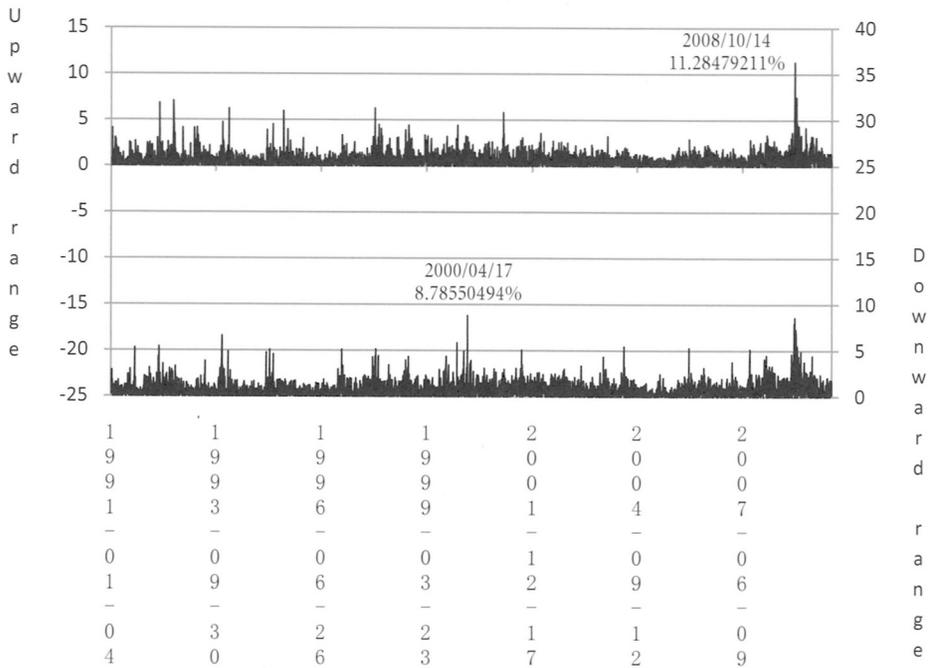
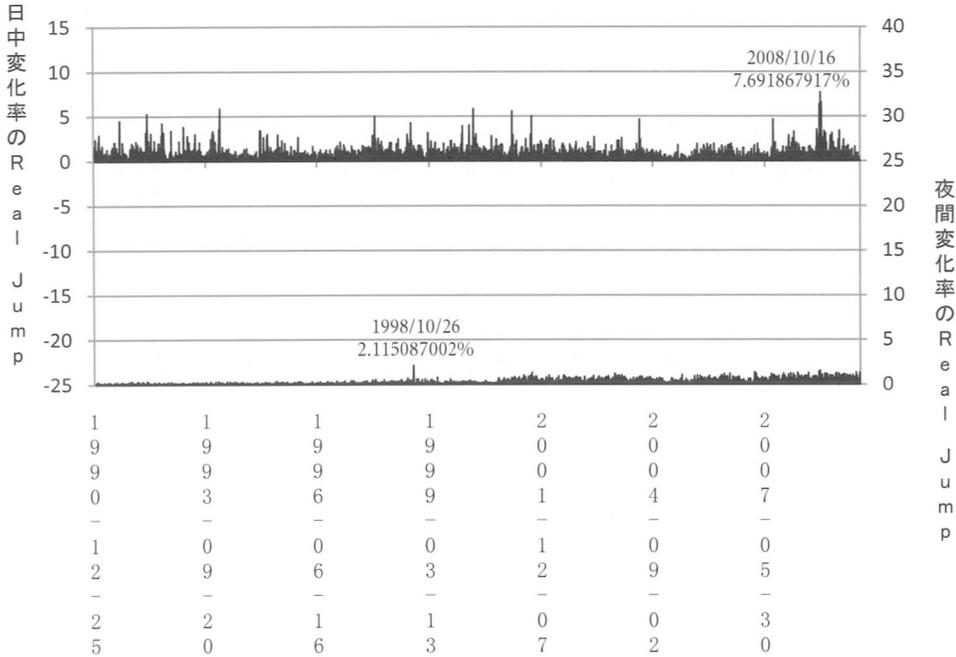


図5 日中・夜間変化率の Real Jump (%)



3. ジャンプ変数

(1)より第 t 日の夜間変化率と日中変化率の Realized Volatility (RV_{ot} と RV_{dt}), Upward Range の Realized Range-based Volatility (RV_{upt}) と Downward Range の Realized Range-based Volatility (RV_{dwt}) を(3)で定義する⁵⁾。

$$\begin{aligned}
 RV_{ot} &= (r_{ot})^2, & RV_{dt} &= (r_{dt})^2 \\
 RV_{upt} &= (r_{upt})^2, & RV_{dwt} &= (r_{dwt})^2
 \end{aligned}
 \tag{2}$$

また, Barndorff-Nielsen *et al.* [11] [12] [13] による Bi-Power Variation (BV_{ot} と BV_{dt}) と同様の BV_{upt} と BV_{dwt} を定義して, (3)のようにジャンプ変数を定義した⁶⁾。

$$\begin{aligned}
 BV_{ot} &= \frac{\pi |r_{ot}| |r_{ot-1}|}{2}, & BV_{dt} &= \frac{\pi |r_{dt}| |r_{dt-1}|}{2} \\
 BV_{upt} &= \frac{\pi |r_{upt}| |r_{upt-1}|}{2}, & BV_{dwt} &= \frac{\pi |r_{dwt}| |r_{dwt-1}|}{2}
 \end{aligned}
 \tag{3}$$

ただし, Giot *et al.* [24] と Tauchen and Zhou [38] と Czubala [19] と Lanne [31] と Eraker

表 2 単位根検定によるランダム・ウォーク仮説

	Schmidt- Phillips 検定(a)	KPSS 検定(b)					
		Lag=1	Lag=2	Lag=3	Lag=4	Lag=5	Lag=22
夜間変化率	-65.7559**	0.172306*	0.174549*	0.178254*	0.17762*	0.180523*	0.154457*
日中変化率	-58.2674**	0.0240072	0.0245911	0.0253851	0.0260117	0.02654	0.0303553
Range	-35.4665**	1.94607**	1.4827**	1.20647**	1.02634**	0.897177**	0.325601**

(a) Schmidt and Phillips [37] による。有意水準 10% の臨界値は -2.75, 有意水準 5% の臨界値は 3.02, 有意水準 1% の臨界値は -3.56 である。

(b) Kwiatkowski *et al.* [44] による $H_0: y_t$ の和分の次数は 0 で, y_t は定常過程, $H_1: y_t$ の和分の次数は 1 であるという仮説検定を考察している。

$$y_t = \beta_0 + \beta_1 t + \theta y_{t-1} + \gamma \sum_{i=1}^k x_i + \varepsilon_t, \quad KPSS_t = \sum_{t=1}^T \left(\sum_{i=1}^t \hat{\varepsilon}_i \right)^2 / \left(T^2 \hat{\omega}_T^2 \right)$$

ここで, $\hat{\omega}_T^2$ は長期分散のノンパラメトリック推定値であり, 自己共分散の加重平均であり, 加重は Bartlett カーネルである。Kwiatkowski *et al.* [33] によれば, l は T の関数とし, $l_0=0$, $l_1=\text{integer}[4(T/100)1/4]$, $l_2=\text{integer}[12(T/100)1/4]$ を想定している。有意水準 10% の臨界値は 0.119, 有意水準 5% の臨界値は 0.146, 有意水準 1% の臨界値は 0.216 である。

[22] はジャンプの検定を行っている⁷⁾。

本節は, 高頻度データを使用した先行研究の分析手法を夜間・日中変化率に適用した場合の手法に合わせてサーベイを行う。Realized Jumps の推定量を(4)とする⁸⁾。

$$\begin{aligned} RJ_{ot} &\equiv \max \{ RV_{ot} - BV_{ot}, 0 \}, & RJ_{dt} &\equiv \max \{ RV_{dt} - BV_{dt}, 0 \} \\ RJ_{ot}^{up} &\equiv \max \{ RV_{ot}^{up} - BV_{ot}^{up}, 0 \}, & RJ_{ot}^{dw} &\equiv \max \{ RV_{ot}^{dw} - BV_{ot}^{dw}, 0 \} \\ RJ_{dt}^{up} &\equiv \max \{ RV_{dt}^{up} - BV_{dt}^{up}, 0 \}, & RJ_{dt}^{dw} &\equiv \max \{ RV_{dt}^{dw} - BV_{dt}^{dw}, 0 \} \end{aligned} \quad (4)$$

ここで, RJ_{ot} は夜間中に上方あるいは下方にジャンプする値, RJ_{dt} は日中に上方あるいは下方にジャンプする値, RJ_{ot}^{up} (RJ_{dt}^{up}) は夜間 (日中) 変化率が上方にジャンプする値, RJ_{ot}^{dw} (RJ_{dt}^{dw}) は夜間 (日中) 変化率が下方にジャンプする値を表す。

4. 1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル

マルコフ・スイッチング回帰モデルは Hamilton [27] によって展開され, 2 種類のレジームを想定し, 変数を RV にしてジャンプ変数を含むマルコフ・スイッチング回帰モデルを考察している⁹⁾。また, Maheu and McCurdy [32] は 1 次のモーメントにレジーム推移 (regime-switching) のある SM(semi-Markov)-ARMAX モデルで推定している。ジャンプ変数を持つ 1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルは不均一分散 (GARCH) モデルで使用される Mean モデルに対応していると考えられる。

表3 1次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル

$$r_{ot} = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{dt-1} + c_3(s_t) \sqrt{R J_{dt-1}} + \varepsilon_{ot}, \quad \varepsilon_{ot} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{dt} = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{ot} + c_3(s_t) \sqrt{R J_{ot}} + \varepsilon_{dt}, \quad \varepsilon_{dt} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{ot} = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{dt-1} + c_4(s_t) \sqrt{R J_{dt-1}^{up}} + c_5(s_t) \sqrt{R J_{dt-1}^{dw}} + \varepsilon_{ot}, \quad \varepsilon_{ot} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{dt} = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{ot} + c_4(s_t) \sqrt{R J_{ot}^{up}} + c_5(s_t) \sqrt{R J_{ot}^{dw}} + \varepsilon_{dt}, \quad \varepsilon_{dt} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{休日が2日以上するとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

	r_{ot}			r_{dt}		
	A1	A2	A3	B1	B2	B3
$c_0(s_0)$			0.0820646** (0.000)		-0.121965** (0.000)	0.114083** (0.000)
$c_0(s_1)$	0.0270799** (0.000)	0.0229517** (0.002)	0.0399783 (0.074)	-0.0698360** (0.000)	0.0838518** (0.010)	-0.119505** (0.000)
c_1	0.0270799** (0.000)	0.181671** (0.000)	0.147585** (0.000)			
$c_2(s_0)$	0.280373** (0.000)	0.222857** (0.000)		0.570893** (0.000)	0.613552** (0.000)	-0.0797866** (0.000)
$c_2(s_1)$	-0.0445354** (0.000)	-0.0404580** (0.000)		4.72882** (0.000)	0.0662032 (0.213)	-0.0747183** (0.000)
$c_3(s_0)$		-0.672632** (0.000)			-1.05060** (0.000)	
$c_3(s_1)$		0.296148** (0.000)			1.22694** (0.000)	
$c_4(s_0)$			0.0181298 (0.080)			0.406224** (0.000)
$c_4(s_1)$			0.327360** (0.000)			1.00988** (0.000)
$c_5(s_0)$			-0.296918** (0.000)			-0.955758** (0.000)
$c_5(s_1)$			-0.0316926* (0.016)			-0.354458** (0.000)
σ	0.429251** (0.000)	0.422009** (0.000)	0.364710** (0.000)	1.00614** (0.000)	0.683495** (0.000)	0.259053** (0.000)
Log Likelihood	-2855.37564	-2820.5414	-2393.13444	-6741.33127	-5615.87477	-1737.43274
情報量						
AIC	1.24235054	1.0430271	2.9285292	1.22863282	2.44241197	0.75919789
Shibata	1.241143635	1.040518394	2.927756229	1.226557053	2.440336203	0.756253878
Schwartz	1.240156925	1.039686209	2.926702707	1.225678944	2.439458094	0.755462716
Linearity LR-test	102.18** (0.0000)	169.58** (0.0000)	226.48** (0.0000)	398.21** (0.0000)	2616.7** (0.0000)	1419.4** (0.0000)
推移確率						
$p(0 0)$	0.229574** (0.002)	0.550680** (0.000)	0.986781** (0.000)	0.986781** (0.000)	0.615696** (0.000)	0.466499** (0.000)
$p(0 1)$	0.237893** (0.000)	0.575320** (0.000)	0.0962923** (0.000)	0.0962923** (0.000)	0.482845** (0.000)	0.569204** (0.000)

推移確率 $p(i|j)$ は時点 t でのレジームが j から時点 $t+1$ のレジームが i に推移する確率を表す。

図 6A モデル A2 の夜間変化率のブル局面 (状態 0) の推移確率

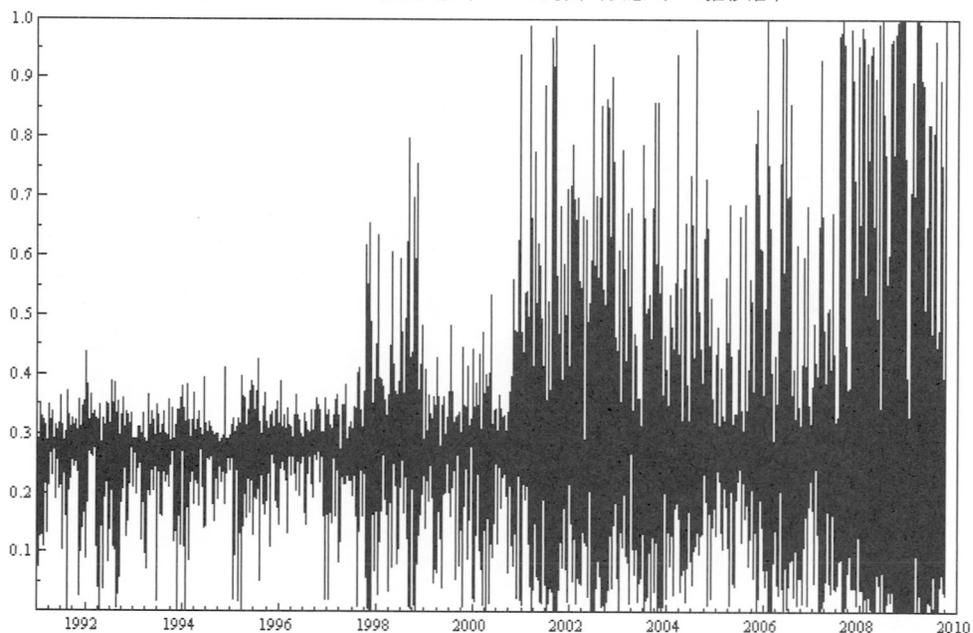


図 6B モデル A2 の夜間変化率のベア局面 (状態 1) の推移確率

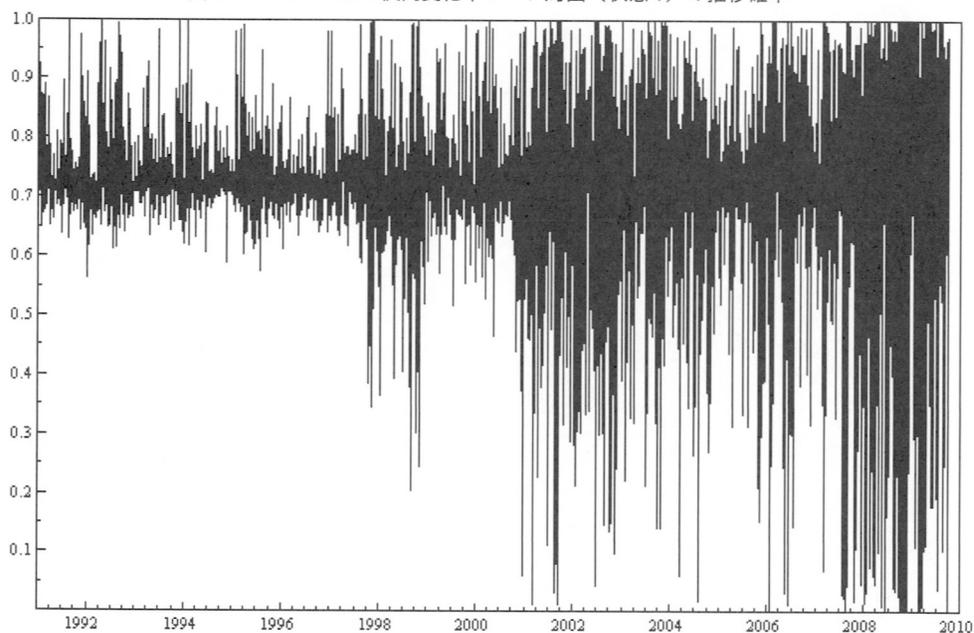


表 3 は、ブル局面とベア局面 (2 種類のレジーム) を想定して、夜間変化率と日中変化率の 1 次のモーメントを推定した。夜間変化率を従属変数とするとき、独立変数を前日の日中変化率とし、日中変化率を従属変数とするとき、独立変数を同日の夜間変化率とした。また、Real Jump

図 7A モデル B3 の日中変化率のブル局面（状態 0）の推移確率

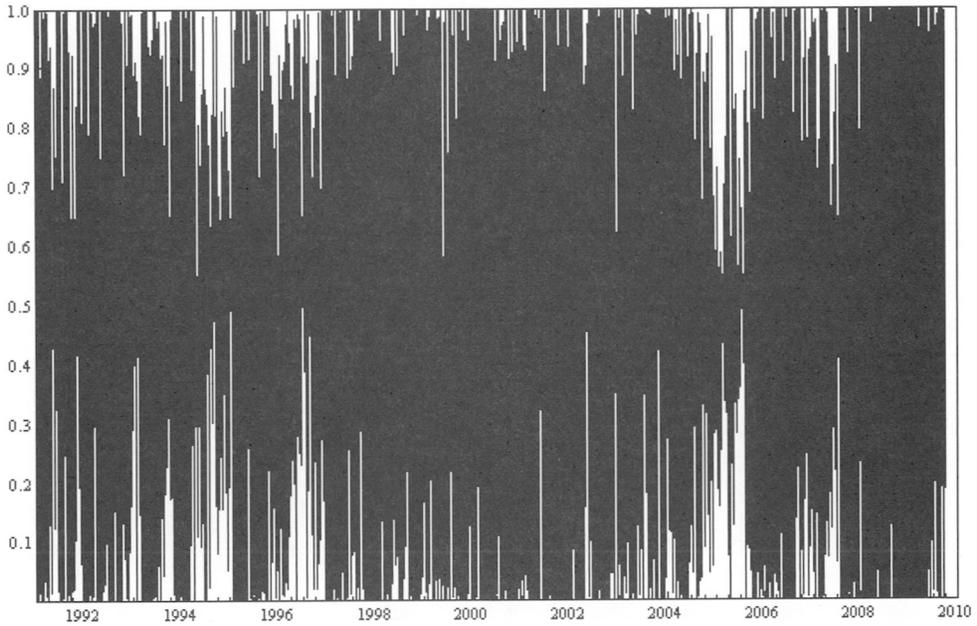
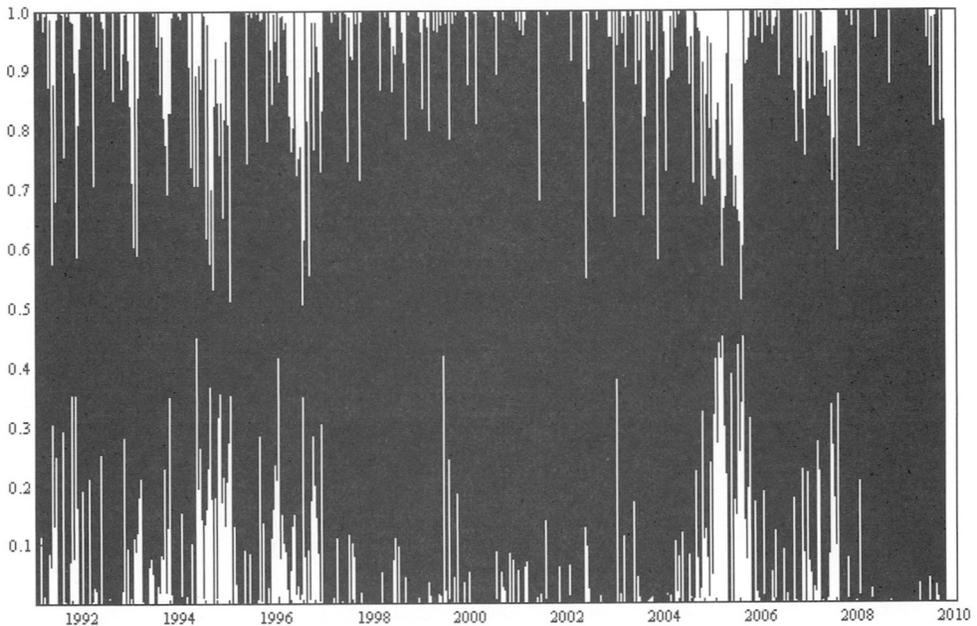


図 7B モデル B3 の日中変化率のベア局面（状態 1）の推移確率



変数を独立変数に加えて、推定モデルは独立変数のゼロ仮説検定で有意に棄却されたモデルで、かつ対数尤度、AIC、Shibata の情報量、Schwartz の情報量に基づいてモデルを同定した。

ジャンプ変数の有無に関わらず、夜間変化率を説明するとき、市場が 2 日以上の日休のとき 1

TOPIX の日次変化率の発生過程とブル・ベア局面を持つマルコフ・スイッチング回帰モデル（中川）

となるダミー変数 (D_t) がゼロ仮説検定を有意水準 1% で棄却したが、日中変化率の場合には棄却されなかった。

また、ジャンプ変数を加えたときモデル A2 では、前日の日中のジャンプ変数 (RJ_{dt-1}) が夜間変化率に影響することが示された。しかし、上方あるいは下方にジャンプする変数 (RJ_{dt-1}^{up} あるいは RJ_{dt-1}^{dw}) を加えたモデル A2 と、代わって前日の日中変化率が有意に夜間変化率に影響しなくなる、すなわち、 $c_4(s_0)$ が有意ではなかったことが判明した。3つの情報量から同定すると表3の A2 モデルが選択され、その推移確率の時系列グラフは図6である。表3の推移確率 $p(0|0)$ と $p(0|1)$ が示すように、ジャンプ変数がないモデル A1 ではブル局面に推移する確率が高く、ジャンプ変数があるモデル A2 ではわずかにベア局面に推移する確率が高いものの、A1 ほど推移し難い。また、上下に別々にジャンプするモデル A3 ではほとんど推移しないという結果を得た。すなわち、夜間変化率がブル・ベアの経済局面に推移したのではなく、夜間変化率がジャンプした可能性が高いことを示している可能性がある。日中変化率のモデル B2 と B3 の RJ_{ot-1} あるいは RJ_{ot-1}^{up} と RJ_{ot-1}^{dw} のすべてでゼロ仮説検定が有意水準 1% で棄却された。3つの情報量から同定するとモデル B3 が選択され、その推移確率の時系列グラフは図7である。また、ジャンプ変数がないモデル B1 での他局面への推移確率は 0.99、ジャンプ変数を加えたモデル B2 での推移確率は 0.62、さらに上下のジャンプ変数を加えたモデル B3 では 0.44 以上とジャンプ変数が加わると他局面への推移確率は減少することが判明した。

つぎに、2次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルで推定する。

5. 2次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル

表4は、2種類のレジームを想定して、前節と同様に夜間変化率と日中変化率の2次のモーメントを推定した。変化率の2乗モデルの結果、休日のダミー変数は有意であったのはジャンプ変数がないモデルであり、夜間変化率では推移のないジャンプ変数、日中変化率では推移のあるジャンプ変数が有意であった。上下にジャンプする変数を加えると、 c_2 の係数が有意に負となったが、十分条件から2次のモーメントの係数が非負でなければならないことからモデル C3 と D3 は適切ではない。また、 c_1 を除外して、上下にジャンプする変数を加えたモデルで推定すると、夜間変化率の2乗モデルはモデル C2 で同定され、日中変化率の2乗モデルはモデル D2 で同定されるべきである。

また、推移確率 $p(0|0)$ と $p(0|1)$ あるいはモデル C2 の夜間変化率とモデル D2 の日中変化率の2乗モデルの状態の推移確率の時系列グラフを図8と図9が示すように、変化率に比べて変化率の2乗は他局面への推移がほとんどないことが判明した。

表4 2次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデル

$$r_{ot}^2 = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{dt-1}^2 + c_3 R J_{dt-1} + \varepsilon_{ot}, \quad \varepsilon_{ot} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{dt}^2 = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{ot}^2 + c_3 R J_{ot} + \varepsilon_{dt}, \quad \varepsilon_{dt} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{ot}^2 = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{dt-1}^2 + c_4(s_t) R J_{dt-1}^{up} + c_5(s_t) R J_{dt-1}^{dw} + \varepsilon_{ot}, \quad \varepsilon_{ot} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$r_{dt}^2 = c_0(s_t) + c_1 D_t + c_2(s_t) r_{ot}^2 + c_4(s_t) R J_{ot}^{up} + c_5(s_t) R J_{ot}^{dw} + \varepsilon_{dt}, \quad \varepsilon_{dt} \sim N(0, \sigma^2)$$

$$D_t = \begin{cases} 1 & \text{休日が2日以上するとき} \\ 0 & \text{その他} \end{cases}$$

	r_{ot}^2			r_{dt}^2		
	C1	C2	C3	D1	D2	D3
$c_0(s_0)$	0.0988099** (0.000)	0.0951164** (0.000)	0.0955211** (0.000)	0.752994** (0.000)	0.458139** (0.000)	-0.0664928** (0.001)
$c_0(s_1)$	1.18303** (0.000)	1.18166** (0.000)	1.13818** (0.000)	20.8578** (0.000)	17.5564** (0.000)	-0.327606** (0.000)
c_1	0.0440337* (0.024)			0.712470** (0.000)		
$c_2(s_0)$	0.00433712** (0.000)	0.00399653** (0.000)	-0.00716448* (0.020)	1.32598** (0.000)	0.506210** (0.000)	-0.483065** (0.000)
$c_2(s_1)$	0.0243167** (0.000)	0.0233454** (0.000)	-0.0224886** (0.000)	24.4849** (0.000)	0.629214 (0.092)	-0.158462** (0.000)
$c_3(s_0)$		0.102724** (0.000)			1.24094** (0.000)	
$c_3(s_1)$					4.64224** (0.000)	
$c_4(s_0)$			0.0107928** (0.000)			0.530641** (0.000)
$c_4(s_1)$			0.0440393** (0.000)			0.986614** (0.000)
$c_5(s_0)$			0.00739803** (0.002)			0.465683** (0.000)
$c_5(s_1)$			0.0369304** (0.000)			0.908984** (0.000)
σ	0.202979** (0.000)	0.202150** (0.000)	0.200621** (0.000)	2.25532** (0.000)	1.30974** (0.000)	0.672827** (0.000)
Log Likelihood	-415.622762	-400.605486	-377.760935	-10524.2194	-7883.03316	-5229.52303
情報量						
AIC	0.183943883	0.1851054	0.168806311	4.5732607	3.42684896	2.2755202
Shibata	0.182302238	0.1821613	0.165862299	4.571619058	3.424773195	2.272576192
Schwartz	0.18137308	0.1813702	0.165071138	4.570689901	3.423895087	2.271785031
Linearity LR-test	3393.7** (0.0000)	3382.4** (0.0000)	3399.4** (0.0000)	4276.0** (0.0000)	5248.2** (0.0000)	4409.0** (0.0000)
推移確率						
$p(0 0)$	0.932254** (0.000)	0.986366** (0.000)	0.930419** (0.000)	0.991283** (0.000)	0.997127** (0.000)	0.345895** (0.000)
$p(0 1)$	0.669986** (0.000)	0.827493** (0.000)	0.674090** (0.000)	0.883515** (0.000)	0.603140** (0.000)	0.490616** (0.000)

推移確率 $p(i|j)$ は時点 t でのレジームが j から時点 $t+1$ のレジームが i に推移する確率を表す。

図 8A モデル C2 の夜間変化率のブル局面 (状態 0) の推移確率

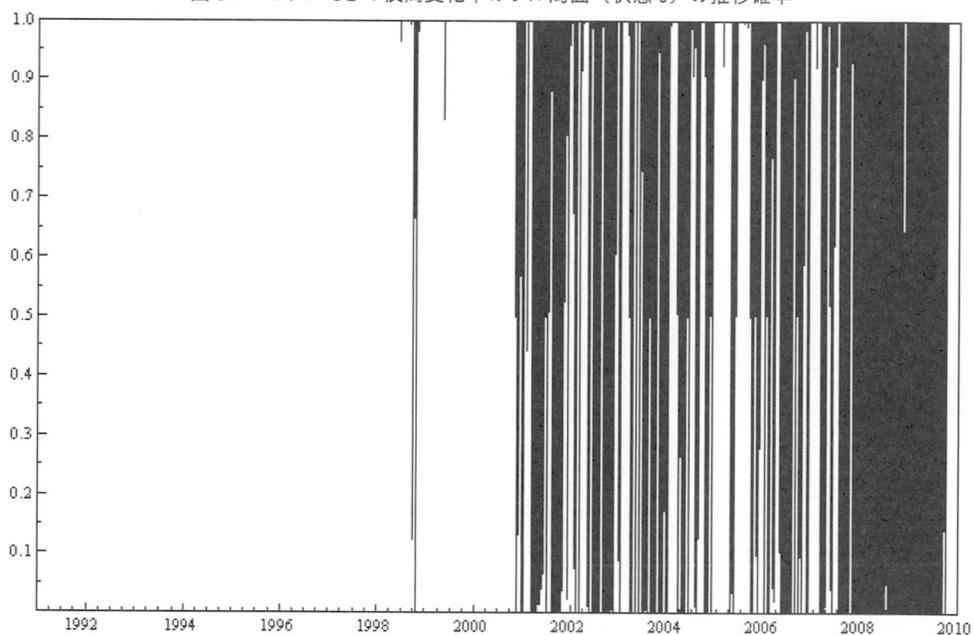


図 8B モデル C2 の夜間変化率のベア局面 (状態 1) の推移確率

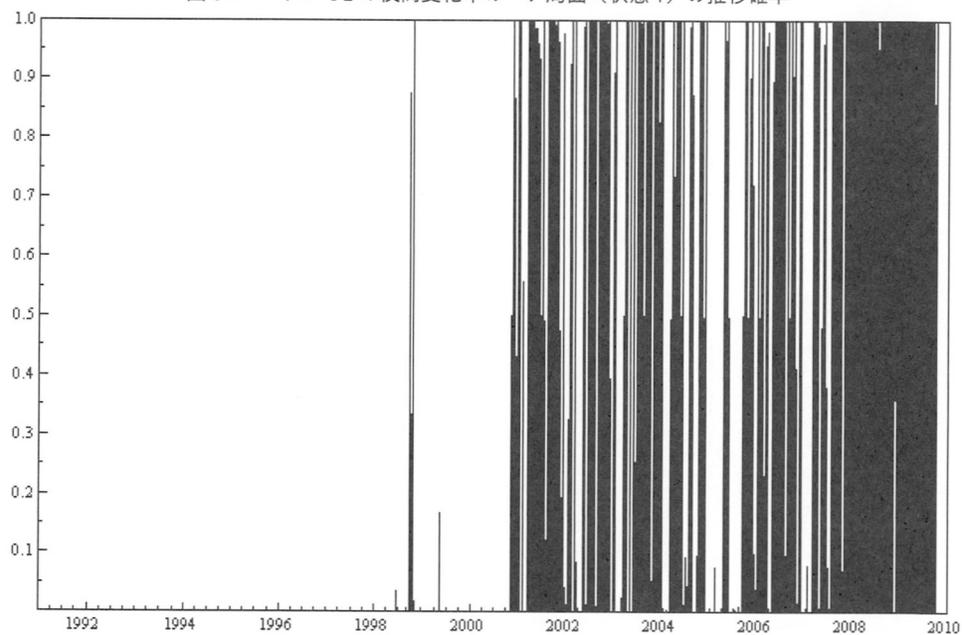


図 9A モデル D2 の日中変化率の 2 乗のペア局面 (状態 0) の推移確率

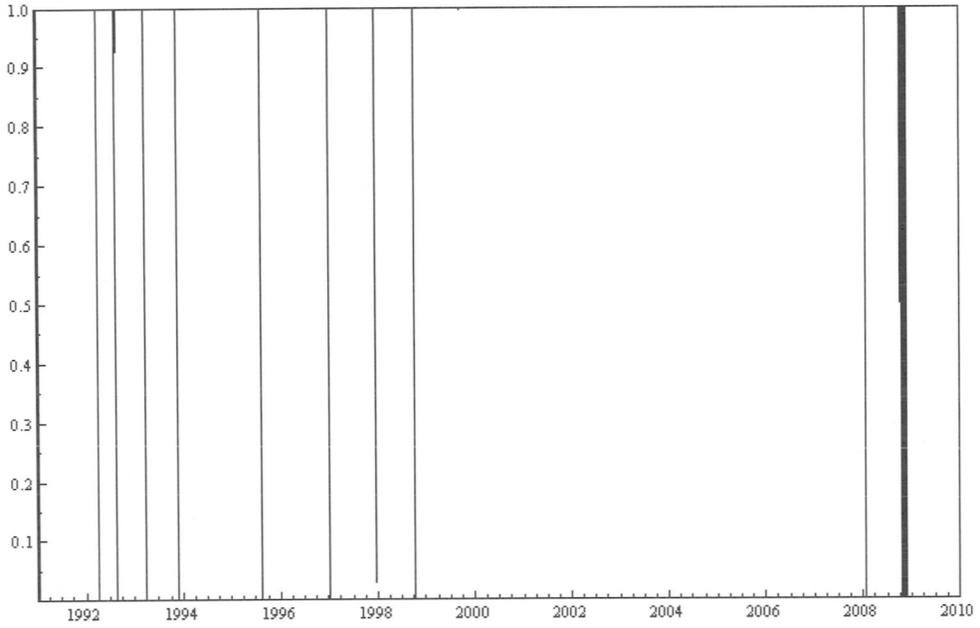
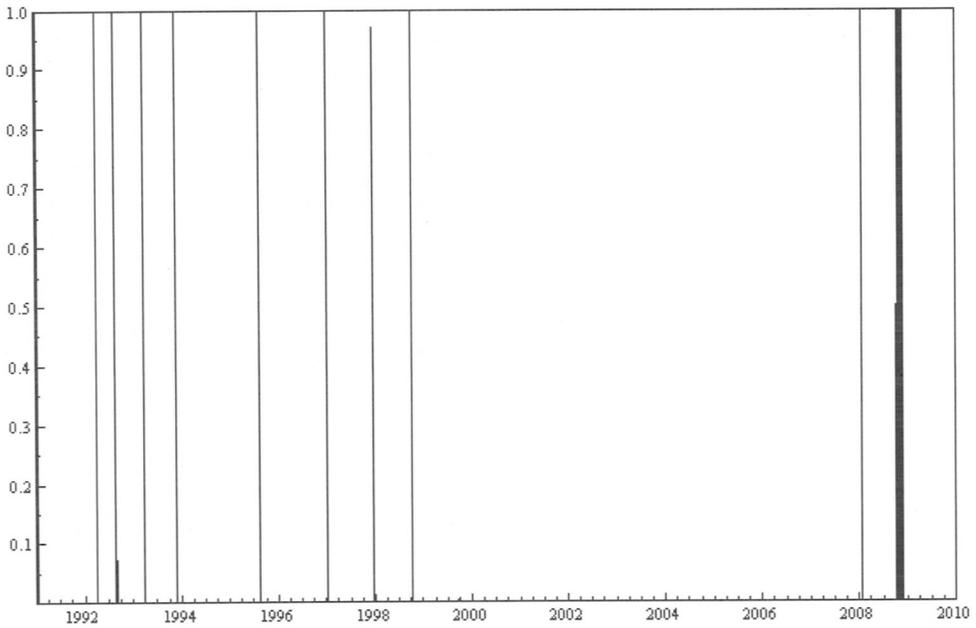


図 9B モデル D2 の日中変化率の 2 乗のペア局面 (状態 1) の推移確率



6. おわりに

バブル崩壊後の TOPIX の 1991 年 1 月 4 日から 2009 年 9 月 30 日の変化率に基づき、ジャンプ変数を持つ確率的に 2 つ以上の状態に推移するマルコフ・スイッチング回帰モデルによる同定を本稿の目的とした。

単位根検定による Schmidt-Phillips 検定によると、すべての変数が和分の次数がゼロ、すなわち、変数は定常であるという帰無仮説を有意水準 1% で棄却する。KPSS 検定によると、Range が変数は定常であるという帰無仮説を有意水準 1% で棄却し、夜間変化率が帰無仮説を有意水準 5% で棄却するが、日中変化率が帰無仮説を有意水準 5% で棄却できないという結果を得た。よって、日中変化率は定常であるが、夜間変化率は非定常である可能性がある。

また、夜間変化率と日中変化率は $\Delta y_t = \beta_0 + \gamma_1 \Delta y_{t-1} + \varepsilon_t$ の可能性があり、Range, Upward Range, Downward Range については $y_t = \beta_0 + \gamma_1 y_{t-1} + \varepsilon_t$ の可能性がある。

次に、1 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定した。そのとき、夜間変化率モデルでは休日ダミー変数がゼロ仮説検定を有意水準 1% で棄却されたが、日中変化率の場合には棄却されなかった。また、ジャンプ変数を加えたとき、上下方向のジャンプ変数 (RJ_{dt-1}) が有意に夜間変化率に影響することが示されたが、しかし上方・下方のジャンプ変数 (それぞれ RJ_{upt-1} あるいは RJ_{dwt-1}) に変えると、前日の日中変化率が夜間変化率に影響しなくなることが判明した。3 つの情報量から同定すると表 3 の A2 モデルが選択された。日中変化率のモデルに RJ_{ot} あるいは RJ_{upt} と RJ_{dwt} を加えると、すべてでゼロ仮説検定が有意水準 1% で棄却された。3 つの情報量から同定すると表 3 の B3 モデルが選択された。

最後に、2 次のモーメントのマルコフ・スイッチング回帰モデルを推定すると、夜間変化率と日中変化率の 2 乗の両モデルでは RJ_{upt-1} あるいは RJ_{dwt-1} を加えた表 4 のモデル C3 と D3 が 3 つの情報量から選択され、すべての独立変数のゼロ仮説検定が有意水準 1% で棄却された。

〔注〕

- 1) GARCH モデルのサーベイとしては Palma [35] がある。GARCH モデルを使用したボラティリティの予測の早い時期での研究には Andersen and Bollerslev [5] がある。
- 2) たとえば、ティック・データを使用した早い時期の研究としては 1 分刻みデータを使った中川 [2]、5 分刻みデータを使った Taylor and Xu [39] などがある。Andersen *et al.* [6] は 2003 年までのボラティリティ予測の実証モデルに関するサーベイを行っている。

たとえば、Ederington and Guan [21] は日次ボラティリティとして以下のもので検定している。

$$STD(n)_t = \sqrt{252 \sum_{j=0}^{n-1} r_{t-j}^2 / n}, \quad MAD(n)_t = \sum_{j=0}^{n-1} |r_{t-j}| / n, \quad AMAD(n)_t = 252\pi \sum_{j=0}^{n-1} |r_{t-j}| / 2n$$

$$RLZ(s)_t = \sqrt{252 \sum_{j=0}^s r_{t+j}^2 / s}, \quad RMSFE = \left[(1/T) \sum_{t=1}^T (RLZ(s)_t - F(n)_t)^2 \right]^{1/2}$$

$$MAFE = (1/T) \sum_{t=1}^T |PLZ(s)_t - F(n)_t|, \quad r_t = \ln(p_t / p_{t-1}) - E[\ln(p_t / p_{t-1}) | \Omega_{t-1}]$$

ここで、 $STD(n)_t$ は過去 n 日間の第 t 日でのヒストリカル標準偏差 (historical standard deviation), $MAD(n)_t$ は第 t 日での平均絶対収益率偏差 (mean absolute return deviation), $AMAD(n)_t$ は第 t 日での修正平均絶対収益率偏差 (adjusted mean absolute deviation), $PLZ(s)_t$ は将来 s 期間の日次対数収益率の標準偏差として第 t 日での realized volatility, $RMSFE$ は平均 2 乗平方予測誤差 (root mean squared forecast error), $MAFE$ は平均絶対予測誤差 (mean absolute forecast error) を表し、 $F(n)_t$ は $STD(n)_t$ または $MAD(n)_t$ であり、 Ω_{t-1} は第 $t-1$ 日の情報集合を表す。

- 3) たとえば, Giacomini and White [23] はボラティリティの検定手順を示し, Benavides and Capistrán [15] は Giacomini and White [23] の検定を使用している。
- 4) 以下の実証分析の理由から 1993 年 9 月 10 日, 1999 年 9 月 8 日, 1994 年 9 月 10 日, 2001 年 5 月 29 日, 2005 年 11 月 1 日, 2006 年 8 月 21 日, 2008 年 6 月 13 日の変化率を除いた。
- 5) Microstructure noise との関係で Zhang *et al.* [41] と Ait-Sahalia *et al.* [3] は 2 時点での Realized Volatility, Zhang [40] は多期間での Realized Volatility との関係を示している。また, Diebold [20] は Microstructure noise と (efficient price や true price のような) latent price の関係から Realized Volatility を求めている。Pagel *et al.* [33] は 3 種類の推定量 SSR (Sum of Squared intra-day Returns) 推定量と VAR-HAC (Vector Autoregressive Heteroscedastic Autocorrelation Consistent) 推定量と ABDE (Andersen *et al.* [8]) 推定量の比較分析を行っている。Alizadeh *et al.* [4] は Range による SV モデルを分析している。Andersen *et al.* [9] は 2 種類の為替レートの変化率の RV を使って相関と長期記憶性を検証した。Marquering and Verbeek [23] は超過収益率の正負かつ予測ボラティリティと定数の大小関係にモンテカルロシミュレーションを使って検定を行っている。
- 6) Barndorff-Nielsen and Shephard [11] と Bandi and Russel [10] は多変量の高頻度の Realized Covariance を分析している。Barndorff-Nielsen and Shephard [7] による BV_t は $\pi \sum_{i=2}^M |r_{t,i}| |r_{t,i-1}| / 2$ である。このとき, ジャンプ過程が有限であれば, $\text{plim}_{M \rightarrow \infty} BV_t = \int_{t-1}^t \sigma^2(s) ds$ となる。本稿では, 任意の 1 日の変化率は夜間変化率と日中変化率から構成されているので, $M=2$ となる。

Bandi and Russel [10] と Hansen and Lunde [28] と Behzadnejad [14] は realized variance と最適なデータ間隔の抽出を考察している。

- 7) Eraker [22] によれば, 以下の 2 種類のジャンプ過程による分析を行っている。

$$\begin{aligned} dp(t)/p(t) &= \mu(t)dt + \sqrt{\sigma(t)}dW_1(t) + \kappa_1(t)dq_1(t), \\ d\sigma(t) &= \beta(\theta - \sigma(t))dt + \gamma\sqrt{\sigma(t)}dW_2(t) + \kappa_2(t)dq_2(t) \end{aligned}$$

ここで, W_1 と W_2 は標準ブラウン運動, $\text{corr}(dW_1, dW_2) = \rho$ は leverage 相関係数, $dq_i(t)$ は定数のジャンプ強度 λ_i を持ち, ランダムなジャンプの大きさは $N(0, \sigma_i^2)$ の分布に従うポワソン過程を表す。さらに,

$$\begin{aligned} dp(t)/p(t) &= (r - \mu^*)dt + \sqrt{\sigma(t)}dW_1(Q(t)) + \kappa_1(t)dq_1(t), \\ d\sigma(t) &= (\beta(\theta - \sigma(t)) + \eta\sigma(t))dt + \gamma\sqrt{\sigma(t)}dW_2(Q(t)) + \kappa_2(t)dq_2(t) \\ dW_i(Q(t)) &= \eta_i dt + dW_i(t) \end{aligned}$$

ここで, ボラティリティは $\beta - \eta$ の率で引き戻され, η はボラティリティ過程のショックに伴うリスクプレミアムパラメータを表す。

Barndorff-Nielsen and Shephard [12] は高頻度データを使用した場合には, 観測期間 Δ をゼロに収束させることによって, Bi-Power Variation は Integrated Volatility のよりよい推定量となることを示している。Barndorff-Nielsen and Shephard [13] は Multipower variance まで導出している。

- 8) Boucher [18] は RV の検定, Bollerslev and Zhou [17] は implied volatility と RV との関係を求め,

Goyal and Saretto [25] はクロスセクションデータから推定された implied volatility が将来の RV の推定値として正確で効率的であることを論じている。Integrated Volatility の推定量 IV_{ot} と IV_{dt} に対する任意の頑健を \hat{IV}_{ot} と \hat{IV}_{dt} とし, Realized Volatility (RV_{ot} あるいは RV_{dt}) との差を Realized Jumps あるいは jump contribution (RJ_{ot} あるいは RJ_{dt}) となる。検定を使って, 有意水準 $\alpha\%$ で第 t 日にジャンプがあれば, 1 とするダミー変数を $I_{t,\alpha}$ とすると, Realized Jumps の推定量が(4)である。

- 9) マルコフ・スイッチング回帰モデルと GARCH モデルを融合した Markov-switching GARCH モデルとして Haas *et al.* [26] と Klaassen [29] がある。

Scharth and Medeiros [36] は STR (tree-structured Smooth Transition Regression)-Tree モデルと regime-switched モデルと HAR モデルを使って IBM 株価を分析している。

〔参考文献〕

- [1] 養谷千鳳彦, 『金融データの統計分析』, 東洋経済新報年社, 2001年。
- [2] 中川裕司, 「Intraday Futures Volume and GARCH Effects in Heteroskedastic Mixture Model」, 『岐阜経済大学論集』第29巻第4号, 1996年3月, pp.75-92。
- [3] Aït-Sahalia, Y., P. A. Mykland and L. Zhang, “Ultra High-Frequency Volatility Estimation with Dependent Microstructure Noise,” 2009, Working paper.
- [4] Alizadeh, S. and C. S. Jones, “Bayesian Range-Based Estimation of Stochastic Volatility Models,” *Finance Research Letters*, 2005, Vol. 2, pp. 201-209.
- [5] Andersen, T. G., and T. Bollerslev, “Answering the Skeptics: Yes, Standard Volatility Models Do Provide Accurate Forecast,” *International Economic Review*, 1998, Vol. 39, No. 4, pp. 885-905.
- [6] Andersen, T. G., T. Bollerslev and F. X. Diebold, “Parametric and Nonparametric Volatility Measurement,” in L. P. Hansen and Y. Aït-Sahalia (eds.), *Handbook of Financial Econometrics*. Amsterdam, 2005, North-Holland, forthcoming.
- [7] ———, “Roughing It Up: Including Jump Components in the Measurement, Modeling and Forecasting of Return Volatility,” *Review of Economics and Statistics*, 2007, Vol. 89, No. 4, pp. 701-720.
- [8] Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold and Ebens, H., “The Distribution of Realized Stock Return Volatility,” *Journal of Financial Economics*, 2001a, Vol. 61, No. 1, pp. 43-76.
- [9] Andersen, T. G., T. Bollerslev, F. X. Diebold and P. Labys, “The Distribution of Exchange Rate Volatility,” *Journal of American Statistical Association*, 2001b, Vol. 96, pp. 42-55.
- [10] Bandi, F. M. and J. R. Russell, “Microstructure Noise, Realized Variance, and Optimal Sampling,” 2005, Working paper.
- [11] Barndorff-Nielsen, O. E. and N. Shephard, “Econometric Analysis of Realized Covariation: High Frequency Based Covariance, Regression, and Correlation in Financial Economics,” *Econometrica*, 2004, Vol. 72, pp. 885-925.
- [12] ———, “Power and Bipower Variation with Stochastic Volatility and Jumps (with discussion),” *Journal of Financial Econometrics*, 2004, Vol. 2, No. 1, pp. 1-48.
- [13] ———, “Variation, Jumps and High Frequency Data in Financial Econometrics,” in *Advanced in Economics and Econometrics, Theory and Applications, Ninth World Congress*, ed. by Blundell, R., T. Persson and W. K. Newey, Econometric Society Monographs, 2007, pp. 328-372, Cambridge University Press.
- [14] Behzadnejad, F., “Measuring and Forecasting the Daily Variance Based on High-Frequency Intraday and Electronic Data,” *Econometrica*, 2008, Vol. 76, No. 6, pp. 1481-1536.
- [15] Benavides, G. and C. Capistrán, “Forecasting Exchange Rate Volatility: The Superior Performance of Conditional Combinations of Time Series and Option Implied Forecasts,” 2009, Banco de México, Working paper.
- [16] Berg, A., R. Meyer, and J. Yu, “Deviance Information Criterion for Comparing Stochastic Volatility Models,” *Journal of Business & Economic Statistics*, 2004, Vol. 22, pp. 107-120.

- [17] Bollerslev, T., and H. Zhou, "Expected Stock Returns and Variance Risk Premia," 2007, Working paper.
- [18] Boucher C., B. Maillat, and T. Michel, "Do Misalignments Predict Aggregated Stock-Market Volatility?," *Economics Letters*, 2008, Vol. 100, pp. 317–320.
- [19] Czubala, W., "Euro and Co-movement of Jump Components in Realized Return Volatility," 2008, Working paper.
- [20] Diebold F., "On Market Microstructure Noise and Realized Volatility," *Journal of Business and Economic Statistics*, 2006, Vol. 24, pp. 181–183.
- [21] Ederington, L. H. and W. Guan, "Measuring Historical Volatility," *Journal of Applied Finance*, 2006, Vol. 16, No. 1, pp. 5–14.
- [22] Eraker, B., "Do Stock Prices and Volatility Jump? Reconciling Evidence from Spot and Option Prices," *Journal of Finance*, 2004, Vol. 59, No. 3, pp. 1367–1403.
- [23] Giacomini, R. and H. White, "Tests of Conditional Predictive Ability," *Econometrica*, 2005, Vol. 74, pp. 1545–1578.
- [24] Giot, P., Laurent, S. and M. Petitjean., "Trading Activity, Realized Volatility and Jumps," 2009, Working paper.
- [25] Goyal, A. and A. Saretto, "Option Returns and the Cross-Sectional Predictability of Implied Volatility," 2006, Working paper.
- [26] Haas, M., S. Mittnik and M. S. Paoletta, "A New Approach to Markov-Switching GARCH Models," *Journal of Financial Econometrics*, 2004, Vol. 2, No. 4, pp. 493–530.
- [27] Hamilton, J. D. "A New Approach to the Economic Analysis of Nonstationary Time Series and the Business Cycle," *Econometrica*, 1989, Vol. 57, No. 2, pp. 357–384.
- [28] Hansen, P. R. and A. Lunde, "A Forecast Comparison of Volatility Models: Does Anything Beat a GARCH (1, 1)?," *Journal of Applied Econometrics*, 2005, Vol. 20, No. 7, pp. 873–889.
- [29] Klaassen, F., "Improving GARCH Volatility Forecasts with Regime-Switching GARCH," *Empirical Economics*, 2002, Vol. 27, No. 2, pp. 363–394.
- [30] Kwiatkowski, D., P. C. Phillips, P. Schmidt and Y. Shin, "Testing the Null of Stationarity Against the Alternative of a Unit Root: How Sure are We that the Economic Time Series Have a Unit Root?," *Journal of Econometrics*, Vol. 54, pp. 159–178.
- [31] Lanne, M., "Forecasting Realized Volatility by Decomposition," 2006, ECO Working paper.
- [32] Maheu J. M. and T. H. McCurdy, "Nonlinear Features of FX Realized Volatility," *Review of Economics and Statistics*, 2002, Vol. 84, No. 4, pp. 668–681.
- [33] Marquering, W. and M. Verbeek, "A Multivariate Nonparametric Test for Return and Volatility Timing," *Finance Research Letters*, 2004, Vol. 1, pp. 250–260.
- [34] Pagel, I. M., P. J. de Jongh, and J.H. Venter, "An Introduction to Realized Volatility," *Investment Analysts Journal*, 2007, No. 65, pp. 47–57.
- [35] Palma, W., "GARCH Models of Volatility," in Maddala, G. and C. Rao, *Handbook of Statistics*, ed., 1996, pp. 209–240, Elsevier Science, Amsterdam.
- [36] Scharth, M and M. Medeiros, "Asymmetric Effects and Long Memory in the Volatility of Dow Jones Stocks," *International Journal of Forecasting*, 2009, Vol. 25, No. 2, pp. 304–327.
- [37] Schmidt, P. and P. C. Phillips, "LM Tests for a Unit Root in the Presence of Deterministic Trends," *Oxford Bulletin of Economics and Statistics*, 54, pp. 257–287.
- [38] Tauchen, G. and H. Zhou, "Realized Jumps on Financial Markets and Predicting Credit Spreads" Finance and Economics Discussion Series, Divisions of Research & Statistics and Monetary Affairs, Federal Reserve Board, Washington, D.C., 2006, Working paper.
- [39] Taylor, S. J. and X. Xu, "The Incremental Volatility Information in One Million Foreign Exchange Quotations," *Journal of Empirical Finance*, 1997, Vol. 4, pp. 317–340.

- [40] Zhang, L., “Efficient Estimation of Stochastic Volatility Using Noisy Observations: A Multi-Scale Approach,” *Bernoulli*, 2006, Vol. 12, No. 6, pp. 1019–1043.
- [41] Zhang, L., P. A. Mykland and Y. Aït-Sahalia, “A Tale of Two Time Scale: Determining Integrated Volatility with Noisy High-Frequency Data,” *Journal of American Statistical Association*, 2005, Vol. 100, No. 472, pp. 1394–1411.