岐阜経済大学論集 44 巻 3 号（2011 年）

TOPIX の夜間・日中変化率の LM ARCH・独立性・正規性・ランダム･ウォーク仮説・長期記憶性検定

中　川　裕　司

1. はじめに

本稿では四本値データを使って，ボラティリティ変動モデル（GARCH モデル）と ARFIMA モデルの一群を使用して，夜間変化率（前日の終値から翌日の始値の変化率）と日中変化率（当日の始値から終値の変化率）とそのボラティリティの変動の特徴を検証する。

そこで，夜間・日中変化率，Range（日次データの高値に対する安値の対数価格比），Upward Range（日次データの高値に対する始値の対数価格比），Downward Range（日次データ高値に対する始値の対数価格比）の基本統計量，3 節では予備分析として上述 5 つの変化率の LM ARCH 検定[1)] と Ljung-Box の Q 統計量，さらに 4 節では変化率の独立性検定統計量として連検定と平均平方逐次階差検定と von Neumann 比，5 節では正規性検定統計量として歪度＝0 の検定と尖度＝3 の検定と Jarque-Bera 検定と Deb-Sefton 検定と Gurland-Dahiya 検定と Geary 検定と D’Agostino〔8〕の D とかばん検定と A* 検定，分散比検定としてランダム･ウォーク検定と Lo-MacKinlay 検定，ラン検定，7 節では長期記憶性検定（R/S 検定）として Hurst-Mandelbrot 検定と Lo〔15〕の自己相関，Log Periodogram Regression と Gaussian semiparametric estimate の d parameter を行う。

2. 基本統計量

r_{ot} を夜間変化率，r_{dt} を日中変化率，r_{hlt} を高値と安値の対数値の差（Range），r_{upt} を upward Range，r_{dwt} を downward Range としてそれぞれ(1)のように定義する。

$$
\begin{aligned}
&r_{ot} = \ln\left(\frac{p_t^{open}}{p_{t-1}^{close}}\right), \qquad r_{dt} = \ln\left(\frac{p_t^{close}}{p_t^{open}}\right), \\
&r_{hlt} = \ln\left(\frac{p_t^{\max}}{p_t^{\min}}\right), \qquad r_{upt} = \ln\left(\frac{p_t^{\max}}{p_t^{open}}\right), \qquad r_{dwt} = \ln\left(\frac{p_t^{open}}{p_t^{\min}}\right)。
\end{aligned}
\tag{1}
$$

ここで，p_t^{open} は第 t 日の始値，p_t^{close} は第 t 日の終値，$p_t^{\max}$ は第 t 日の高値，$p_t^{\min}$ は第 t 日の安値を表し，$t-1$ は第 t 日の 1 営業日前を示す[2)]。

データは TOPIX の 1991 年 1 月 4 日から 2009 年 9 月 30 日の 4,615 の四本値を使用した時系列データを想定する。

表 1 は(1)の変化率の基本統計量を示し，日中変化率のゼロ仮説検定は有意水準 5% で棄却されず，夜間変化率の負の片側検定と日次変化率の正の片側検定は有意水準 1% で棄却されることが判明した。また，夜間変化率と日中変化率との母分散が等しいという帰無仮説に対する F 検定では有意水準 1% で棄却され[3)]，さらに，夜間変化率と日中変化率との母平均が等しいという帰無仮説に対して，母分散が異なると仮定した 2 標本による t 検定を行った結果，有意水準 1% で棄却された[4)]。

同様に，Range と Upward・Downward Range のゼロ仮説検定は有意水準 1% で棄却され，Upward Range と Downward Range との母分散が等しいという帰無仮説に対する F 検定では有意水準 1% で棄却され[5)]，さらに，Upward Range と Downward Range との母平均が等しいという帰無仮説に対して，母分散が異なると仮定した 2 標本による t 検定を行った結果，有意水準 1% で棄却された[6)]。

また，表 1 の夜間変化率と日中変化率の尖度と歪度を見る限り，変化率は正規分布に従うかは疑わしい。そこで，次節では変化率が正規分布に従うかなどの予備分析を行う。本節では改めて夜間変化率と日中変化率の分布が正規分布に従うか否かを検証する。

3. LM ARCH 検定と Q 統計量

蓑谷〔1〕〔2〕によれば，LM 検定は「仮説 A：変数に系列相関がない」「仮説 B：分散が均一である」「仮説 C：変数が正規分布に従う」がすべて満たされることを帰無仮説として，A と

表1　基本統計量[a)]

	r_{ot}	r_{dt}	$r_{ot}+r_{dt}$	r_{upt}	r_{dwt}	r_{hlt}
標本平均[a)]	0.03138** (3.2×10⁻⁶)	−0.0141 (0.483)	−0.0453** (0.00739)	0.620729** (0.00000)	0.716726** (0.00000)	1.337455** (0.00000)
標準誤差	0.00673	0.02007	0.01692	0.010921	0.011789	0.012626
中 央 値（メジアン）	0.03884	−0.0131	−0.0439	0.40352	0.4992	1.129462
標本標準偏差	0.45666	1.3626	1.1488	0.741444	0.800376	0.857191
標本分散	0.20853	1.85667	1.31975	0.54974	0.640602	0.734776
超過尖度	1.4923**	6.6361**	6.64577	15.475**	19.616**	14.164**
歪　　度	−0.18750**	0.081843*	0.08159	2.8736**	3.0505**	2.7748**
範　　囲	4.07129	22.8717	19.692	11.28479	8.785505	11.07899
最　　小	−2.2183	−10.007	−8.4365	0	0	0.205801
最　　大	1.85297	12.8646	11.2555	11.28479	8.785505	11.28479
合　　計	144.615	−64.89	−209.02	2860.939	3303.389	6164.328
標 本 数	4608	4608	4609	4609	4609	4609
信頼区間（95%）の上限	0.01819	−0.0534	−0.0785	0.599318	0.693613	1.312701
信頼区間（95%）の下限	0.04457	0.02527	−0.0122	0.64214	0.739839	1.362208

a)　**（*）はゼロ仮説検定が1%（5%）で棄却できるものを表す。

Bは満たされるがCのみが満たされないことを対立仮説として行われる検定であるため，AとBの一方あるいは両方が満たされない場合にはJaque and Bera検定を行うことは不適切であると論じる[7)]。

表2の夜間・日中変化率のLjung-BoxのQ統計量はラグ1以外のラグでは有意水準1%で棄却される。このことは夜間・日中変化率の1期前のそれぞれの変化率からは直接には影響せず，夜間変化率（日中変化率）は前営業日の日中変化率（夜間変化率）から影響するために，ラグ2以降では間接的に影響しているとも想定される。ここで，いくつかの先行研究に従って，ラグ5を週次変化率，ラグ22を月次変化率での自己相関に関するQ統計量であると想定しているために記載した。また，夜間・日中変化率のLM検定によれば，ラグ1〜2，1〜5，1〜10はすべて有意水準1%で棄却され，夜間変化率と日中変化率の2乗値のQ統計量は有意水準1%で棄却される。このことから(G)ARCH効果が存在し，ボラティリティ変動の長期記憶性が存在することを物語っている[8)]。

4. 独立性検定

表3は連検定とYoung〔21〕による平均平方逐次階差検定とBartels〔6〕によるvon Neumann比としての独立性検定統計量を示した[9)]。その結果，すべての変化率の平均平方逐次階差検定とvon Neumann比では平均ゼロ，分散1の正規分布に従うという仮説は有意水準1%で棄却された。しかし，連検定では，夜間変化率とRangeとUpward・Downward Rangeの系列が

表 2　LM ARCH 検定と Q 統計量[a)]

	夜間変化率	日中変化率	Range	Upward Range	Downward Range
Engle の LM ARCH 検定					
Lag＝1〜2	521.55** (0.0000)	338.28** (0.0000)	928.69** (0.0000)	96.507** (0.0000)	158.05** (0.0000)
Lag＝1〜5	362.72** (0.0000)	189.53** (0.0000)	411.67** (0.0000)	49.746** (0.0000)	94.643** (0.0000)
Lag＝1〜10	213.10** (0.0000)	110.61** (0.0000)	229.74** (0.0000)	30.438** (0.0000)	64.465** (0.0000)
Ljung-Box の Q 統計量					
Lag = 1	3.10938 (0.0778427)	2.96807 (0.0849229)	1163.16** (0.0000000)	182.744** (0.0000000)	186.412** (0.0000000)
Lag = 2	7.78715* (0.0203724)	14.0032** (0.0009104)	2144.90** (0.0000000)	240.499** (0.0000000)	289.439** (0.0000000)
Lag = 3	11.4776** (0.0094048)	20.6903** (0.0001221)	3037.38** (0.0000000)	302.596** (0.0000000)	377.364** (0.0000000)
Lag = 4	19.2436** (0.0007039)	21.2752** (0.0002793)	3751.26** (0.0000000)	355.718** (0.0000000)	457.194** (0.0000000)
Lag = 5	32.9043** (0.0000039)	21.7012** (0.0005967)	4442.90** (0.0000000)	397.373** (0.0000000)	520.396** (0.0000000)
Lag = 10	56.9218** (0.0000000)	33.4193** (0.0002315)	7322.32** (0.0000000)	564.799** (0.0000000)	903.364** (0.0000000)
Lag = 20	97.5425** (0.0000000)	48.4458** (0.0003682)	11265.0** (0.0000000)	891.303** (0.0000000)	1466.38** (0.0000000)
Lag = 22	98.2891** (0.0000000)	56.8999** (0.0000635)	11823.2** (0.0000000)	902.890** (0.0000000)	1520.36** (0.0000000)
2 乗値の Ljung-Box の Q 統計量					
Lag = 1	514.707** (0.0000000)	209.267** (0.0000000)	1013.03** (0.0000000)	149.383** (0.0000000)	184.927** (0.0000000)
Lag = 2	1134.18** (0.0000000)	700.465** (0.0000000)	1945.72** (0.0000000)	215.295** (0.0000000)	355.592** (0.0000000)
Lag = 3	1798.95** (0.0000000)	1112.39** (0.0000000)	2674.84** (0.0000000)	274.824** (0.0000000)	509.771** (0.0000000)
Lag = 4	2525.14** (0.0000000)	1277.66** (0.0000000)	3160.11** (0.0000000)	319.817** (0.0000000)	595.228** (0.0000000)
Lag = 5	3123.51** (0.0000000)	1462.63** (0.0000000)	3615.22** (0.0000000)	348.205** (0.0000000)	736.691** (0.0000000)
Lag = 10	6139.18** (0.0000000)	2401.40** (0.0000000)	5817.17** (0.0000000)	461.696** (0.0000000)	1393.76** (0.0000000)
Lag = 20	11549.6** (0.0000000)	3133.82** (0.0000000)	8180.06** (0.0000000)	878.274** (0.0000000)	2018.44** (0.0000000)
Lag = 22	12553.2** (0.0000000)	3172.85** (0.0000000)	8386.46** (0.0000000)	881.962** (0.0000000)	2056.86** (0.0000000)

a)　**（*）はゼロ仮説検定が 1%（5%）で棄却できるものを表す。

無作為であるという帰無仮説は有意水準 1% で棄却されたが，日中変化率の系列では有意水準 5% で棄却されなかった。

表3　独立性検定統計量

	連 検 定(a)	平均平方逐次階差検定(b)	Von Neumann 比(c)
夜間変化率	-2.961331^{**} (0.001532)	1.763687^{**} (0.038892)	-67.89256^{**} (0.000000)
日中変化率	-0.707104 (0.239751)	1.720719^{**} (0.042651)	-67.89993^{**} (0.000000)
Range	-17.3702^{**} (7.0×10^{-68})	25.81481^{**} (0.000000)	-67.89256^{**} (0.000000)
Upward Range	-4.714042^{**} (1.21×10^{-6})	13.83957^{**} (0.000000)	-67.89993^{**} (0.000000)
Downward Range	-21.23206^{**} (2.4×10^{-100})	34.10808^{**} (0.000000)	-67.89993^{**} (0.000000)

( )内はp値を表す。

(a)　連検定は H_0：系列は無作為である。H_1：系列は無作為ではない，という仮説検定を行い，誤差項は標準正規分布に従う。

$$Z = \left(R + 0.5 - E\left[R\right]\right) \Big/ \sqrt{Var\left(R\right)} \approx N\left(0,1\right), \quad E\left[R\right] = 2mn \big/ \left(m+n\right) + 1,$$

$$Var\left(R\right) = 2mn\left(2mn - m - n\right) \Big/ \left\{\left(m+n\right)^2\left(m+n-1\right)\right\}。$$

ここで，$20 \leq m < n$ のとき，R は同じ記号が連続して現れるとき，その連の長さは R である。m は記号＋の個数，n は記号－の個数である。夜間変化率と日中変化率以外は中位数を除した値で連検定を行った。有意水準10%の標準正規分布は1.281552，有意水準5%の標準正規分布は1.644854，有意水準1%の標準正規分布は2.326348である。

(b)　平均平方逐次階差検定（Mean Square Successive Difference：MSSD）はYoung〔21〕により，帰無仮説 H_0：$X_i \sim N(0,1)$ を検定する。$n \geq 20$ のとき，$1 - s_*^2 / s^2$ は正規近似する。ここで，X_i は第i番目のデータの値を表し，$\bar{X}$ は X_i の標本平均を表す。

$$Z = \left(1 - s_*^2 / s^2\right) \Bigg/ \sqrt{\frac{n-2}{\left(n-1\right)\left(n+1\right)}}, \quad s^2 = \sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \bar{X}\right)^2 \Big/ \left(n-1\right), \quad s_*^2 = \sum_{i=1}^{n-1}\left(X_{i+1} - X_i\right)^2 \Big/ 2\left(n-1\right)。$$

(c)　Von Neumann 比はBartels〔9〕により，帰無仮説 H_0：$X_i \sim N(0,1)$ を検定する。

$$Z_R = \left(RVN - 2\right) \Big/ \sqrt{20 / \left(5n+7\right)}, \quad RVN = \sum_{u=2}^{n}\left(R_i - R_{i-1}\right)^2 \Big/ \sum_{u=1}^{n}\left(R_i - \bar{R}\right)^2, \quad 0 \leq RVN \leq 4。$$

ここで，X_i を大きさの順に並べ替えたときのランクを R_i とする。X_i が $X_1, \cdots, X_n$ の最小値ならば $R_i = 1$ であり，最大値ならば $R_i = n$ である。RVNが0に近いほど，あるいは4に近いほど H_0 に不利な証拠となる。

5. 正規性検定

表4は変数の正規性に関する検定であり，D'Agostino〔8〕による歪度＝0の検定とAnscombe and Glynn〔4〕による尖度＝3の検定は変数から計算される値が漸近的に標準正規分布に従うという帰無仮説を検定するものである。変数の平均ゼロ，分散 σ^2 に従うという帰無仮説のJarque-Bera検定[10]とDeb and Sefton〔13〕による検定とGurland Dahiya検定，変数が（漸近的に）正規分布に従うという帰無仮説のGeary検定とD'Agostino〔8〕のDとかばん検定[11]と A^2 検定としての9種類の正規性検定統計量を行った。ただし，Gearyの正規性検定では $G_l < G_1\left(l = 1, 2\right)$ のとき裾の長い対称分布，$G_l > G_2\left(l = 1, 2\right)$ のとき，裾の短い対称分布と判断される[12]。

表4　正規性検定統計量

	歪度＝0の検定(a)	尖度＝3の検定(b)	Jarque-Bera検定(c)	Deb-Sefton検定(d)	Gurland Dahiya検定(e)
夜間変化率	0.0766699 (0.469443)	−0.090278 (0.464033)	454.55** (1.9726×10^{-99})	456.7309** (6.6×10^{-100})	308.679** (9×10^{-68})
日中変化率	0.0333531 (0.486696)	−0.090235 (0.464050)	8460.4** (0.00000)	8496.075** (0.00000)	2359.07** (0.00000)
Range	0.6173535 (0.268501)	−0.090275 (0.464034)	52323** (0.00000)	2445.688** (0.00000)	2165.08** (0.00000)
Upward Range	1.2011739 (0.114842)	−0.090141 (0.464087)	81046** (0.00000)	61262.63** (0.00000)	12801.2** (0.00000)
Downward Range	1.1746361 (0.120070)	−0.090154 (0.464082)	44441** (0.00000)	52512.28** (0.00000)	12056.4** (0.00000)

	Geary検定(f)		D'AgostinoのD(g)	かばん検定(h)	A^2検定(i)
	G_1	G_2			
夜間変化率	0.710114	0.709988	0.2675660**	0.0140285 (0.993010)	648.5696**
日中変化率	0.708129	0.708128	0.2611991**	0.0092548 (0.995383)	1143.035**
Range	0.765779	0.706839	0.2564963**	0.3892749 (0.823133)	1727.662**
Upward Range	0.689880	0.655288	0.2384081**	1.4509443 (0.484096)	3136.983**
Downward Range	0.684191	0.65244	0.2390158**	1.3878977 (0.499599)	189.4805**

(　)内はp値を表す。

(a)　歪度＝0の検定はD'Agostino〔8〕により，$n>8$のとき，Z_1が標準正規分布に漸近的に従う。

$$Z_1=\frac{1}{\sqrt{l\ln\left(\sqrt{2(\gamma-1)}-1\right)/2}}\log\left\{\frac{Y}{\alpha}+\left[\left(\frac{Y}{\alpha}\right)^2+1\right]^{1/2}\right\},\quad \alpha=\sqrt{\frac{2}{\sqrt{2(\gamma-1)}-2}},$$

$$Y=\sqrt{\frac{b_1(n+1)(n+3)}{6(n-2)}},\quad \gamma=\frac{3(n^2+27n-70)(n+1)(n+3)}{(n-2)(n+5)(n+7)(n+9)}。$$

(b)　尖度＝3の検定はAnscombe and Glynn〔4〕により，$n>20$のとき，Z_2が標準正規分布に漸近的に従う。

$$Z_2=\frac{1-\dfrac{2}{9A}-\left\{\dfrac{1-2/A}{1+Y\sqrt{2/(A-4)}}\right\}^{1/3}}{\sqrt{2/9A}},\quad Y=\frac{b_2-E[b_2]}{\sqrt{Var(b_2)}}=\frac{b_2(n+1)-3(n-1)}{\sqrt{\dfrac{24n(n-2)(n-3)}{(n+3)(n+5)}}},$$

$$A=6+\frac{8}{\kappa_3}\left\{\frac{2}{\kappa_3}+\sqrt{1+\left(\frac{2}{\kappa_3}\right)^2}\right\},\quad \kappa_3=\frac{6(n^2-5n+2)}{(n+7)(n+9)}\sqrt{\frac{6(n+3)(n+5)}{n(n-2)(n-3)}}。$$

(c)　帰無仮説はH_0：$X_i\sim N(\mu,\sigma^2)$である。

(d)　Jarque-Bera検定は大標本による検定であるのに対し，Deb and Sefton〔9〕による検定は小標本による検定であり，統計量は

$$\text{Deb-Sefton 統計量}=\left[\frac{\sqrt{b_1}}{\sqrt{(8-n)/(n+1)(n+3)}}\right]^2+\left[\frac{b_2-3(n-1)/(n+1)}{\sqrt{24n(n-2)(n-3)/(n+1)^2(n+3)(n+5)}}\right]^2$$

$$=\frac{b_1(n+1)(n+3)}{6(n-1)}+\frac{(n+1)^2(n+3)(n+5)}{24n(n-2)(n-3)}\left\{b_2-\frac{3(n-1)}{n+1}\right\}^2。$$

であり，近似的に自由度2の χ^2 分布に従う。ここで，歪度と尖度のそれぞれの推定値は

$$b_1 = m_3^2 \big/ m_2^3, \quad b_2 = m_4 \big/ m_2^2, \quad m_k = \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^k \Big/ n, \quad k \geq 2,$$

である。有意水準10%の $\chi^2_{0.1}$ 値は4.6051702，有意水準5%の $\chi^2_{0.05}$ 値は5.9914645，有意水準1%の $\chi^2_{0.01}$ 値は9.2103404である。

(e) Gurland-Dahiya検定は大標本による検定であり，

$$\text{Gurland-Dahiya 統計量} = nb_1/6 + 3n\left(\ln\left(b_2/3\right)\right)^2 \Big/ 8,$$

であり，近似的に自由度2の χ^2 分布に従う。帰無仮説は H_0 : $X_i \sim N\left(\mu, \sigma^2\right)$ である。

(f) Geary検定は帰無仮説 H_0 : X_i は正規分布する，にたいする統計量である。

$$G_1 = \sum_{i=1}^{n} \left|X_i - \bar{X}\right| \Big/ \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2}, \quad G_2 = \sum_{i=1}^{n} \left|X_i - \tilde{X}\right| \Big/ \sqrt{n \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2},$$

$$G_l \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} - z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi}\right)}, \quad G_u \cong \sqrt{\frac{2}{\pi}} + z_{\alpha/2} \sqrt{\frac{1}{\pi}\left(1 - \frac{3}{\pi}\right)}。$$

ここで，$\tilde{X}$ は標本中位数である。n が十分大きければ，有意水準 α のとき $N(0,1)$ の上側確率 $\alpha/2$ を与える点を $z_{\alpha/2}$，G_l は下限，G_u は上限を表す。α=10%のとき $[G_l, G_u]$ は[0.6443852, 0.9513839]，α=5%のときは[0.6008703, 0.9948989]，α=1%のときは[0.5192435, 1.0765256]である。ただし，$G<G_l$ のとき，裾の長い対称分布にであり，$G>G_u$ のとき，裾の短い対称分布である。

(g) D'Agostino〔8〕のDは帰無仮説 H_0 : X は正規分布する，にたいする統計量である。

$$D = \sum_{i=1}^{n} c_i X_{(i)} \Bigg/ \left[n^{3/2} \left\{\sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \bar{X}\right)^2\right\}^{1/2}\right], \quad D_p = E\left[D\right] + V_p \sqrt{Var\left(D\right)}, \quad c_i = i - \frac{1}{2}\left(n+1\right),$$

$$E\left[D\right] = 0.2820948 - \frac{0.07052370}{n} + \frac{0.008815462}{n^2} + \frac{0.01101933}{n^3} - \frac{0.00282575}{n^4},$$

$$Var\left(D\right) = \frac{0.0008991591}{n} - \frac{0.0004779168}{n^2} - \frac{0.004973592}{n^3} + \frac{0.003108496}{n^4},$$

$$V_p = Z_p + \frac{\gamma_1\left(Z_p^2 - 1\right)}{6} + \frac{\gamma_2\left(Z_p^3 - 3Z_p\right)}{24} + \frac{\gamma_1^2\left(2Z_p^3 - 5Z_p\right)}{36},$$

$$\gamma_1 = -\frac{8.5836542}{\sqrt{n}}\left(1 - \frac{3.938688}{n} + \frac{7.344405}{n^2}\right), \quad \gamma_2 = \frac{114.732}{n}\left(1 - \frac{8.38004}{n}\right)。$$

ここで，$X_{(i)}$ は大きい順に並べたi番目の X_i であり，Z_p は標準正規分布の右片側100p%の値を表す。このとき $D<D_p$ のとき急尖的（leptokurtic）分布，$D>D_{1-p}$ のとき緩尖的（platykurtic）分布である。表中の ** は正規分布であるという帰無仮説を有意水準1%で棄却するものを表す。

(h) かばん検定は帰無仮説 H_0 : X_i は正規分布に従う，という検定である。$n \geq 20$ のとき，(a)の Z_1 と(b)の Z_2 から $Z_1^2 + Z_2^2$ が漸近的に自由度2の χ^2 分布に従う。

(i) Anderson and Darling〔3〕による帰無仮説 H_0 : X_i は正規分布に従う，という検定で，以下の手順に従う。

(1) 観測データを標準化して大きい順に並べ替える。$X_{(i)}$ は大きい順に並べたi番目の X_i である。

$$p_i = \Phi\left(Z_{(i)}\right) = \int_{-\infty}^{Z_{(i)}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{t^2}{2}} dt, \quad Z_{(i)} = \frac{X_{(i)} - \bar{X}}{s}, \quad i = 1, 2, \cdots, n。$$

ここで，Φ( )は標準正規変数の分布関数である。

(2) Anderson and Darling統計量 A^2 と修正統計量 A^* を計算する

$$A^* = A^2\left(1 + \frac{0.75}{n} + \frac{2.25}{n^2}\right), \quad A^2 = -\sum_{i=1}^{n} \left\{\left(2i - 1\right) \frac{\ln p_i + \ln\left(1 - p_{n+1-i}\right)}{n}\right\} - n。$$

(3) 有意水準10%・5%・2.5%・1%・0.5%でそれぞれ A^* は0.631・0.752・0.873・1.035・1.159を超えれば，H_0 を棄却する。

表5　分散比検定とラン検定

	夜間変化率	日中変化率	Range	Upward Range	Downward Range
分散比検定					
			Lo-MacKinlay 検定[(a)]		
q=2	1.792474*	−0.036529	1.74391*	−0.040587	162.1254**
q=3	0.642426	−0.260298	0.081642	−0.467466	35.7150**
q=4	−0.218164	−0.413651	−1.066157	−0.143176	43.4817**
q=5	−0.074107	−0.470462	−1.629672	−0.051585	50.2361**
q=22	1.96928*	−0.024460	−2.26580*	−0.011732	111.2909**
			ランダム・ウォーク検定[(b)]		
q=2	1.02619	−0.22681	−0.854556	−0.30026	1.50265**
q=3	1.15161	−0.19259	0.82523	−0.18109	8.92593**
q=4	1.01398	−0.66717	1.00135	−0.97190	1.97877**
q=5	0.99280	−0.86034	0.97008	−0.54203	2.43771**
q=22	0.99684	−0.94774	0.94721	−0.36215	2.87134**
ラン検定[(a)]	−2.88697**	−0.00389	−0.83970	−0.401076	−21.2500**

(a)　Lo and MacKinlay〔16〕による分散比検定であり，

$$Z\left(q\right)=\sqrt{\frac{3nq}{2\left(2q-1\right)\left(q-1\right)}}M_r\left(q\right),\quad M_r\left(q\right)=\frac{\sigma_c^2\left(q\right)}{\sigma_a^2}-1,\quad m=q\left(n-q+1\right)\left(1-\frac{q}{n}\right),$$

$$\sigma_a^2=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(r_t-\overline{r}\right)^2,\quad \sigma_c^2\left(q\right)=\frac{1}{m}\sum_{t=q}^{n}\left(r_t+\cdots+r_{t+q-1}-q\overline{r}\right)^2。$$

近似的に標準正規分布に従う。帰無仮説は H_0 : X_i はランダム・ウォークである。

(b)　Mandelbrot〔17〕による不均一分散の可能性を考慮したランダム・ウォーク検定であり，$E\left[\hat{V}\left(q\right)/\hat{V}\left(1\right)\right]=1$ を検証する。

$$Z\left(q\right)=\frac{\hat{V}\left(q\right)/\hat{V}\left(1\right)-1}{\sqrt{M_r\left(q\right)/n}},\quad M_r\left(q\right)\cong\sum_{\tau=1}^{q-1}\left\{\frac{2\left(q-\tau\right)}{q}\right\}^2\hat{\rho}\left(i\right)=\frac{4}{q^2}\sum_{\tau=1}^{q-1}\left(q-\tau\right)^2\hat{\rho}\left(i\right),$$

$$\hat{\rho}\left(i\right)\cong n\sum_{t=i+1}^{n-\tau}\left(r_t-\overline{r}\right)^2\left(r_{t-i}-\overline{r}\right)^2\Bigg/\left\{\sum_{t=1}^{n}\left(r_t-\overline{r}\right)^2\right\}^2,$$

$$\hat{V}\left(1\right)=\frac{1}{n-1}\sum_{t=1}^{n}\left(r_t-\overline{r}\right)^2,\quad \hat{V}\left(q\right)=\frac{1}{q\left(n-q+1\right)\left(1-q/n\right)}\sum_{t=1}^{n-q+1}\left(r_t+\cdots+r_{t+q-1}-q\overline{r}\right)^2。$$

ここで，有意水準10%の臨界値は[0.861, 1.747]，有意水準5%の臨界値は[0.809, 1.862]，有意水準1%の臨界値は[0.721, 2.098]である。

(c)　ランダム・ウォーク仮説の一つであるFama〔10〕によって使用されたラン検定であり，

$$K=\frac{C-E\left[C\right]}{\sqrt{Var\left(C\right)}},\quad C=1+\sum_{t=1}^{n-1}c_t,\quad E\left[C\right]=n+1-1\Big/\left(n\sum\nolimits_{j=1}^{3}n_j^2\right),$$

$$Var\left(C\right)=\left\{\sum\nolimits_{j=1}^{3}n_j^2\left(n+n^2+\sum\nolimits_{j=1}^{3}n_j^2\right)-n^3-2n\sum\nolimits_{j=1}^{3}n_j^3\right\}\Big/\left(n^3-n\right)。$$

n が増大するに従って，k は近似的に正規分布に従い，もし $|k|>1.96$ なら，ランダム・ウォーク仮説は有意水準5%で棄却される。

表6　長期記憶性検定

	夜間変化率	日中変化率	Range	Upward Range	Downward Range
長期記憶性検定			Hurst-Mandelbrot 検定[(a)]		
	2.39573**	1.00690	6.12055**	3.06520**	3.83783**
			Lo の自己相関[(b)]		
q=1	2.36522**	0.99436	4.99376**	2.79924**	3.50192**
q=2	2.37985**	1.00628	4.35260**	2.64793**	3.28165**
q=3	2.40420**	1.02229	3.92244**	2.52944**	3.11285**
q=4	2.39919**	1.03473	3.61494**	2.43202**	2.97511**
q=5	2.41790**	1.04507	3.37764**	2.35080**	2.86129**
q=22	2.22710**	1.11558	2.02340*	1.70476	1.95077*
d parameter			Log Periodogram Regression[(c)]		
	−0.0444934** (0.0013)	−0.0234812 (0.0906)	0.420359** (0.0000)	0.172383** (0.0000)	0.215178** (0.0000)
			Gaussian semiparametric estimate[(d)]		
	−0.0526248** (0.0000)	0.0107718 (0.3011)	0.418124** (0.0000)	0.235828** (0.0000)	0.251445** (0.0000)

(a)　Hurst-Mandelbrot（Mandelbrot〔17〕）による検定 H_0：長期記憶性があることを

$$\frac{R}{S}=\frac{1}{\sqrt{ns}}M_n,\quad M_n=\left[\max_{1\le T\le n}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t-\overline{r}\right)\right]-\left[\min_{1\le T\le n}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t-\overline{r}\right)\right],$$

で検定する。ここで，S は標本標準偏差を表す。

(b)　Lo〔15〕による検定 H_0：長期記憶性があることを

$$\frac{R}{S}=\frac{1}{\sqrt{n\hat{\sigma}}}M_n,\quad M_n=\left[\max_{1\le T\le n}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t-\overline{r}\right)\right]-\left[\min_{1\le T\le n}\sum_{t=1}^{T}\left(r_t-\overline{r}\right)\right],\quad \hat{\sigma}^2=s^2\left[1+2\sum_{j=1}^{q}\left(1-\frac{j}{q+1}\right)\hat{\rho}_j\right],$$

で検定する。ここで，有意水準10%のときR/Sが[0.861, 1.747]のとき，有意水準5%のときR/Sが[0.809, 1.862]のとき，有意水準1%のときR/Sが[0.721, 2.098]のとき，H_0 が棄却されない。

(c)　Geweke and Porter-Hudak〔13〕による。

(d)　Robinson and Henry〔18〕による。

その結果，すべての変化率でJarque-Bera検定とDeb-Seftom検定とGurland Dahiya検定とD'Agostino〔8〕のDと A^2 検定の5種類の正規性検定で有意水準1%で棄却される一方で，歪度=0の検定と尖度=3の検定とかばん検定の3種類の正規性検定で有意水準5%で棄却されなかった。

6. ランダム・ウォーク仮説の検定

表5は，ランダム・ウォーク仮説の検定であり，Lo and MacKinlay〔16〕による分散比検定としてLo-MacKinlay検定と不均一分散の可能性を考慮したランダム・ウォーク検定，Fama〔10〕によって使用されたランダム・ウォーク仮説の一つであるラン検定で検証した。その結果，

Downward Rangeはすべての検定で有意水準1%で棄却した。夜間変化率はq次が2と22のときのLo-MacKinlay検定では有意水準5%で棄却し，ラン検定では有意水準1%で棄却した。Rangeは有意水準5%でq次が2と22のときのLo-MacKinlay検定を棄却した。しかし，その他の変化率のすべての検定では有意水準5%で棄却できなかった。

7. 長期記憶性

表6は長期記憶性検定[13)]であり，Mandelbrot〔17〕によるR/S検定であるHurst-Mandelbrot統計量と修正R/S統計量であるLo〔15〕によるLoの自己相関〔91〕, Geweke and Porter-Hudak〔13〕によるLog Periodogram RegressionとRobinson and Henry〔18〕によるGaussian semi-parametric estimateの2種類のdパラメータを示した。R/S検定の2種類の統計量はともに，「変数に長期記憶性がない」という帰無仮説を日中変化率以外の変数ではすべて有意水準1%で棄却し，日中変化率では有意水準5%で棄却できなかった。

8. おわりに

1991年1月4日から2009年9月30日のTOPIXの四本値データから夜間変化率と日中変化率とUpward RangeとDownward Rangeの様々な統計量を検証した。その結果，夜間変化率と日中変化率（あるいはUpward RangeとDownward Range）の母分散が等しいという帰無仮説に対するF検定と母平均が等しいという帰無仮説に対するt検定はともに有意水準1%で棄却された。

夜間・日中変化率のLjung-BoxのQ統計量はラグ1以外のラグでは有意水準1%で棄却され，LM検定によれば，(G)ARCH効果が存在し，ボラティリティ変動の長期記憶性が存在することを物語っている。

夜間変化率とRangeは独立性検定，q次が2と22のときのランダム･ウォーク仮説検定，長期記憶性がないという帰無仮説に有意に棄却したが，日中変化率は独立性検定，ランダム･ウォーク仮説検定，長期記憶性がないという帰無仮説有意には棄却されなかった。また，Upward RangeとDownward Rangeは長期記憶性がないという検定に有意に棄却した。

最後に，正規性検定の結果，すべての変化率で5種類の検定で有意水準1%で棄却される一方で，3種類の検定では有意水準5%で棄却されなかった。

〔注〕

1) LM ARCH検定はLagRange Multiplier (LM) 検定を表す。

2) 四本値を使ったボラティリティの分析にはYang and Zhang〔112〕とShu and Zhang〔107〕がある。

3）自由度4613のF値は0.9333780447，有意水準1%のF値は0.157144298，p値は0であった。

4）自由度6028の|t値|は4.178140679，有意水準1%のt値は2.576645126，p値は2.98055×10^{-5}であった。

5）自由度4613のF値は0.858579335，有意水準1%のF値は0.933780447，p値は1.13812×10^{-7}であった。

6）自由度6028の|t値|は5.959668333，有意水準1%のt値は2.57636535，p値は2.62068×10^{-9}であった。

7）Bai and Ng〔15〕はBが満たされるが，Aが満たされない場合の正規性の検定法を示している。なお，Fiorentini *et al.*〔62〕によれば，GARCH-Meanモデルのみ Jaque and Ber検定が行える。

8）均一分散の検定として，Breush-Pagan検定やWhite検定やGodfrey-Koenker検定があるが，いずれも1次のモーメントモデルを同定して，推定後に得られる検定であるために，本稿では取り扱わなかった。

9）他にGarman and Klass〔63〕によるGarman-Klass volatility推定量などがある。

10）Jarque-Bera検定〔83〕は歴史的にはBowman and Shenton〔34〕による検定が早いので，本来ならBowman and Shenton検定と呼ばれるべきであると蓑谷〔2〕は述べる。ただし，計量経済学の慣例に従ってJarque-Bera検定も記載した。

11）かばん検定（portmanteau test）はD'Agostino and Pearson検定とも呼ばれる。

12）蓑谷〔2〕によれば，Gearyの正規性検定統計量は歪度＝0，尖度＝3の非正規分布に対して高い検定力をもつ。X_iが正規分布より両裾の厚い分布（尖度＞3の分布）に従うとき，「外れ値」が発生しやすく，$\bar{X}$は「外れ値」の影響を大きく受ける。尖度＞3の分布に対しては，$\bar{X}$ではなく，「外れ値」に頑強な$\tilde{X}$を用いるG_2の方がG_1より検定力は高いと述べている。

13）長期記憶生検定として，尺度不変範囲（rescaled Range）すなわち，R/S検定として知られる。

〔参考文献〕

〔1〕蓑谷千凰彦，『金融データの統計分析』，東洋経済新報年社，2001年．

〔2〕———，『計量経済学（第1巻　数量経済学シリーズ）』，多賀出版，1997年．

〔3〕Anderson, T. W. and D. A. Darling, "A Test of Goodness-of-Fit," *Journal of the American Statistical Association,* 1954, Vol. 49, pp. 765–769.

〔4〕Anscombe, F. J. and W. J. Glynn, "Distribution of the Kurtosis Statistic b_2 for Normal Statistics," *Biometrika,* 1983, Vol. 70, pp. 227–234.

〔5〕Bai, J. and S. Ng, "Tests for Skewness, Kurtosis, and Normality for Time Series Data," *Journal of Business & Economic Statistics,* 2005, Vol. 23, No. 1, pp. 49–60.

〔6〕Bartels, R., "The Rank Version of von Neumann's Ratio Test for Randomness," *Journal of the American Statistical Association,* 1982, Vol. 77, pp. 40–46.

〔7〕Bowman, K. O. and L. R. Shenton, "Omnibus Test Contours for Departures from Normality Based on $\sqrt{b_1}$ and b_2," *Biometrika,* 1975, Vol. 62, pp. 243–250.

〔8〕D'Agostino, R. B., "Transformation to Normality of the Null Distribution of g_1," *Biometrika,* Vol. 57, 1970, pp. 679–681.

〔9〕Deb, P. and M. Sefton, "The Distribution of a Lagrange Multiplier Test of Normality," *Economics Letters,* 1996, Vol. 51, pp. 123–130.

〔10〕Fama, E. F., "The Behavior of Stock Market Prices," *Journal of Business,* 1965, Vol. 38, pp. 34–105.

〔11〕Fiorentini, G., E. Sentana, and G. Calzolari, "On the Validity of the Jarque-Bera Normality Test in Conditionally Heteroskedastic Dynamic Regression Models," *Economic Letters,* 2004, Vol. 83, pp. 307–312.

〔12〕Garman, M. B. and M. J. Klass, "On the Estimation of Security Price Volatility from Historical Data," *Journal of Business,* 1980, Vol. 53, pp. 67–78.

〔13〕Geweke, J. and S. Porter-Hudak, "The Estimation and Application of Long Memory Time Series Models," *Journal of Time Series Analysis,* 1983, Vol. 4, pp. 221–238, in, Robinson, P. M., *Time Series with Long Memory,* Oxford University Press, pp. 119–137.

〔14〕 Jarque, C. M. and A. K. Bera, "Efficient Tests for Normality, Homoscedasticity and Serial Independence of Regression Residuals," *Economics Letters,* 1980, Vol. 6, pp. 255–259.

〔15〕 Lo, A. W., "Long-Term Memory in Stock Market Prices," *Econometrica,* 1991, Vol. 59, pp. 1279–1313.

〔16〕 Lo, A. W. and A. C. MacKinlay, "Stock Market Prices Do Not Follow Random Walks: Evidence from a Simple Specification Test, " *Review of Financial Studies,* 1988, Vol. 1, pp. 41–66.

〔17〕 Mandelbrot, B. B., "Statistical Methodology for Nonperiodic Cycles: from the Covariances to R/S Analysis," *Annals of Economic and Social Measurement,* 1972, Vol. 1, No. 3, pp. 259–290.

〔18〕 Robinson, P. M. and M. Henry, "Long and Short Memory Conditional Heteroskedasticity in Estimating the Memory Parameter of Levels," *Econometric Theory,* 1999, Vol. 15, pp. 299–336.

〔19〕 Shu, J. H. and J. E. Zhang, "Testing Range Estimators of Historical Volatility," *Journal of Futures Markets,* 2006, Vol. 26, No. 3, pp. 297–313.

〔20〕 Yang, D. and Q. Zhang, "Drift-Independent Volatility Estimation Based on High, Low, Open, and Losing Prices," *Journal of Business,* 2000, Vol. 73, No. 3, pp. 477–491.

〔21〕 Young, L. C., "On Randomness in Ordered Sequences," *Annals of Mathematical Statistics,* 1941, Vol. 12, pp. 293–300.