岐阜協立大学論集 60 巻 1 号（2026 年）
The Journal of Gifu Kyoritsu University, Vol.60, No.1（2026）

# 投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題

中川　裕司（岐阜協立大学経営学部）

キーワード：曖昧さの程度、HARA 型効用関数、曖昧さ調整期待効用、投資、評価関数

## １．はじめに

中川（2026b）は、曖昧さの有無によるマーコビッツモデルと CAPM とシャープ比率を考察した。本稿では、投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題を考察する。その結果、曖昧な経済における危険資産への投資総割合は、曖昧さのない経済における危険資産への投資総割合よりも少なく、一方曖昧な経済における無危険資産への投資割合は、曖昧さのない経済における無危険資産への投資割合よりも多くなることを明らかにする。直感的には、曖昧さのない経済における不確実性はリスクだけであるのに対し、曖昧な経済における不確実性はリスクと曖昧さが存在することになり、多くの不確実性が存在することから、投資家は危険資産よりも無危険資産を好む傾向にあることを意味する。

Rothschild and Stiglitz（1970）は、平均保存スプレッド（Mean-Preserving Spreads）アプローチを確率に適用した[1]。また主観的期待効用理論（SEUT：SEU Theory）および累積プロスペクト理論（CPT：Cumulative Prospect Theory）は、いずれも状態空間上で定義された行為を選択対象とする理論である。行為とは各状態に対して結果を対応させる写像である。ただし SEUT では、結果に対する効用と状態に対する主観的確率が分離して評価されるのに対し、CPT では、確率が結果の順位に依存する累積確率加重によって評価されるため、結果と確率の評価は分離されない。

曖昧さモデルの先行研究は、Gilboa and Schmeidler（1989）の Max-Min モデル、Klibanoff, Marinacci and Mukerji（KMM 2005）の Smooth Ambiguity モデルなどが存在する。Gilboa and Schmeidler（1989）は、曖昧な経済での意思決定者が最悪の確率分布に基づいて曖昧さを回避すると考える。また KMM は、曖昧さに対する嫌悪さを平滑（強弱）で表現できると考え、曖昧さにたいする態度を二段階で意思決定する点に特徴がある。不確実性確率付き期待効用（EUUP：Expected Utility（with）Uncertain Probability）[2]に基づく Izhakian, and Benninga（2011 など）の Izhakian モデルでも、二段階の意思決定を行う。そのとき曖昧さの程度に応じて確率そのものを再構成する主観的確率群を考える。その主観的確率群の下で、曖昧さの分布になる外生的な重みで平均して意思決定する。つまり Max-Min モデルのように最悪の確率分布に基づいて曖昧さを回避するだけにはならないモデルを想定する。

本稿では、Izhakian モデルの枠組みを応用して、外生的な重みを曖昧さに反比例する信頼度で評価する。つまり曖昧さの程度が大きいほど、他の曖昧さの程度と比較して、その信頼性を小さくするというモデルであり、本稿のモデルは Izhakian モデルを拡張（内生化）する。

リスクに依存しない曖昧さを測定するためには、状態空間分轄までの結果に依存しない測定でなければならない。具体的には、Izhakian, Yermack and Zender（2022）の例を使って、結果の順序付けと事象の順序付けが独立である考えを説明する。

> 「ある会社が、4,000万円の投資を考えていると想定する。企業は客観的確率を知らない不均衡なコインを投げて投資決定する。ペイオフは、出現した事象によって表が出現したら1億円、裏が出現したら0円とする。今、情報が入ってきて、表が出現した場合のペイオフが2億円に上がったとする。」

この場合、期待ペイオフとリスクが増加し[3]、経営者は、この投資がより魅力的であると考える。一方、可能性に関する新しい情報はないので、曖昧さは変わらない。その代わりに、新しい情報（ペイオフが2億円に上がったこと）がコインの曖昧さの度合いをより大きくする。そのため曖昧さを嫌う経営者

は、高いペイオフ（2億円）が得られる確率を下げ、投資機会は魅力的ではなくなる。この場合、新情報は、尤度だけに関係するとして、経営者はペイオフの評価を変える理由はない。この例は、「曖昧さは、状態空間の分割までは、結果に依存しない」という重要な性質を浮き彫りにしている。つまり、事象に関連する結果が変化しても、事象への状態空間の誘導分割（事象の集合）が、変化しなければ、曖昧さの度合いは変化しない。そこでは曖昧さの尺度を導き出すには、Izhakian(2020)は、次の2つの前提条件を満たす必要があると主張する。

(1) 曖昧さは、事象の確率のみに適用され、これらの事象に関連する結果とは、無関係でなければならない。すなわち上記の例では、コインの表裏の事象（結果）とペイオフの変更とは、無関係ということである。

(2) さらに意思決定モデルでは、曖昧さと曖昧さに関する態度（嗜好）を分離しなければならない。

Izhakian（2017）は、EUUPモデルがこれら2つの前提条件を支持すると主張する。

EUUPの意思決定フレームワークでは、不確実性には、2つの階層（段階）がある。1つは、結果に関してであり、もう1つは、これらの結果の確率に関してである。このフレームワークにおける意思決定者は、第一段階で、意思決定に関連するすべての事象について、自分の認識する主観的確率を表現する。第二段階では、知覚した主観的確率を用いて、各選択肢の価値を評価し、それに従って選好する。曖昧さ（確率に関する不確実性）は、第一段階で重要な役割を果たし、リスク（結果に関する不確実性）は、第二段階で重要な役割を果たす。そこではリスクの期待値と曖昧さのボラティリティは、関連しないために、独立した積として表現できるとIzhakian（2017, 2020）は論じる[4]。

次節では、曖昧さの程度と主観的確率の関係、第3節では、効率的フロンティア上の投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題、第4節では、資本市場線（CML：Capital Market Line）上の投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題、第5節では、HARA型効用関数と曖昧さ関数を設定し、最適解の条件を求め、第6節では、数値例を示す。

## 2. 曖昧さの程度と主観的確率の関係

曖昧さの有無による最適投資割合の差は、中川（2026b）の表1の主観的確率分布$P_j(\tilde{r}_{ks})$をどれだけ信用するかが、内生的に変わることにある。つまり曖昧さがない場合は、主観的確率は1つ（または固定）であり、曖昧な経済では、主観的確率が複数あり、そのため(1)式の曖昧さの程度$\mho$（モー）が大きくなり、中川（2026b）と同様に、(2)式の主観的確率の重み$\alpha_j$から影響を受ける。最終的には、曖昧さのない場合に比べ、危険資産の期待収益率が割り引かれ、ボラティリティはリスクと曖昧さにたいして二重に効き、危険資産への投資割合は減少する[5]。

$$\mho_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{S}\left(\frac{\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is})}{\sum_{l=1}^{m}\mathrm{P}_l(\tilde{r}_{is})}\right)\left(\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is}) - E[\mathrm{P}(\tilde{r}_{is})]\right)^2\right\}}, \quad j = 1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

$$\alpha_j = \frac{1/\mho_j}{\sum_{i=1}^{m} \mho_i}. \tag{2}$$

(3)式の$\Delta_m$は$m$次元単体を表す。

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Delta_m. \tag{3}$$

ただし(4)式とする。

$$\Delta_m = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \middle| \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}. \tag{4}$$

## 3. 効率的フロンティア上の投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題

$\omega_i^{(j)}$は曖昧さシナリオ$j$の下での第$i$危険資産の主観的確率を合成するための重みを表し、一般に曖昧さシナリオにたいして無差別であるので、意思決定者は第一段階で$\omega_i^{(j)} = 1/n$と仮定する[6]。同時に(2)式の$\alpha_j$を決定する。

第二段階で(5)式から(9)式の危険資産からなる曖昧さ調整期待効用最大化を行う[7]。

$$\max_{\{w_i\}_{i=1}^n} E_\Psi\left[\alpha_j \phi\left(E_{\Pi_j}\left[u\left(\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\right)\right]\right)\right] = \max_{\{w_i\}_{i=1}^n} \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi\left(D_j(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right), \tag{5}$$

Subject to

$$D_j = E_{\Pi_j}\left[u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\right] = \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right), \tag{6}$$

$$1 = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{1}, \tag{7}$$

$$\alpha_j \geq 0, \quad \sum_{j=1}^{m} \alpha_j = 1, \tag{8}$$

$$p_s^{(j)} = \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(j)} \mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is}), \quad \omega_i^{(j)} \geq 0, \quad \sum_{i=1}^{n} \omega_i^{(j)} = 1, s = 1,2,3,4. \tag{9}$$

ここで$E_{\Pi_j}[\cdot]$は主観的確率分布$\Pi_j$の下で評価した期待効用、$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})$は危険資産への投資割合（$n \times 1$ 行列）、$\mathbf{1}$は1の$n \times 1$ 行列、$p_s^{(j)}$は経済状態$s$のとき、危険資産が主観的確率$j$にたいする状態確率を表す[8]。$u' > 0$、$u'' < 0$、$\phi' > 0$、$\phi'' < 0$を仮定する。経済状態が$s$のときの危険資産のみからなる最終富は、(10)式である。

$$\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})\right) = W_0 \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \tilde{\boldsymbol{r}}. \tag{10}$$

ここで$W_0$は初期富、$\tilde{\boldsymbol{r}}$は危険資産の収益率を表す。ポートフォリオの期待収益率は(11)式である。

$$\mu_p = \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}), \tag{11}$$

ここで$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$は危険資産の期待収益率（$n \times 1$ 行列）を表す。

ラグランジュ乗数を$\lambda_1$とすると、ラグランジュアン$\mathcal{L}$は(12)式である。

$$\mathcal{L}\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}), \lambda_1 : \boldsymbol{\alpha}, \boldsymbol{\omega}^{(j)}\right) = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi\left(p_s^{(j)} \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u\left(\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right)\right) + \lambda_1(1 - \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{1}). \tag{12}$$

このとき$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})$の最適値を$\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})$、$\lambda_1$の最適値を$\lambda_1^e$とすると、1階条件は(13)式である。

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial w_i} = \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi'\left(D_j\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u'\left(\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) W_0 \tilde{r}_{is} - \lambda_1^e = 0, \quad i = 1,2,\cdots,n. \tag{13.a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}}{\partial \lambda_1} = 1 - \boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})^T \mathbf{1} = 0. \tag{13.b}$$

ここで(13.$a$)の$\tilde{r}_{is}$は経済状態$s$に第$i$危険資産の状態別収益率を表す。(13.$a$)式より、(14)式となる。

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi'\left(D_j\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u'\left(\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) W_0 \tilde{r}_{is}$$

$$= \sum_{j=1}^{m} \alpha_j \phi'\left(D_j\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u'\left(\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{e}}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right) W_0 \tilde{r}_{ks}. \quad i \neq k, \quad i,k = 1,2,\cdots,n. \tag{14}$$

なお経済状態$s(s=1,2,\cdots,S)$のときの収益率$\tilde{r}_{is}$と$\tilde{r}_{ks}$を決定すれば、危険資産の最適投資割合$\boldsymbol{w}^{e}(\boldsymbol{\alpha})$が決定される。

## 4. CML 上の投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題

つぎに(5)式と(6)式と(8)式と(9)式と(15)式の無危険資産を含む曖昧さ調整期待効用最大化問題を考える。

$$\max_{\{w_i\}_{i=1}^{n}} E_{\Psi}\left[\alpha_j\phi\left(E_{\Pi_j}\left[u\left(\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\right)\right]\right)\right]=\max_{\{w_i\}_{i=1}^{n}}\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\phi\left(D_j(w_i)\right), \tag{5}$$

Subject to

$$D_j=E_{\Pi_j}\left[u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\right]=\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right), \tag{6}$$

$$1=w_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\mathbf{1}\right), \tag{15}$$

$$\alpha_j\geq 0,\quad \sum_{j=1}^{m}\alpha_j=1, \tag{8}$$

$$p_s^{(j)}=\sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(j)}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is}),\quad \omega_i^{(j)}\geq 0,\quad \sum_{i=1}^{n}\omega_i^{(j)}=1, s=1,2,3,4. \tag{9}$$

ここで$w_f(\boldsymbol{\alpha})$はCML 上の危険資産の投資割合を表す。(10)式に代わって(16)式は経済状態が$\boldsymbol{s}$のときの無危険資産を含む最終富である。

$$\begin{aligned}\widetilde{W}_s\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})\right)&=W_0\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\tilde{\boldsymbol{r}}_s+(1-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\mathbf{1})r_f\right)\\&=W_0\left(1+r_f+y(\boldsymbol{\alpha})\left(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\mathbf{1}\right)\right)\right), s=1,2,\cdots,S.\end{aligned} \tag{16}$$

ここで$y(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済における危険資産への投資総割合を表す。ポートフォリオの期待収益率は(17)式である。

$$\mu_p=r_f+\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\mathbf{1}\right), \tag{17}$$

ラグランジュ乗数を$\lambda_2$とすると、ラグランジュアン$\mathcal{L}_f$は(18)式となる。

$$\mathcal{L}_f\left(w_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\alpha}),\lambda_2:\boldsymbol{\alpha},\boldsymbol{\omega}^{(j)}\right)=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\phi\left(D_j\right)+\lambda_2\left(1-w_{\boldsymbol{f}}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\mathbf{1}\right)\right). \tag{18}$$

曖昧な経済における危険資産への最適投資割合を$w_f^{c}(\boldsymbol{\alpha})$、$\lambda_2$の最適値を$\lambda_2^{c}$とすると、1 階条件は(19)式となる。

$$\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial w_i}=\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\phi'\left(D_j\right)\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u'\left(\widetilde{W}_s\left(w_{\boldsymbol{i}}^{c}(\boldsymbol{\alpha})\right)\right)\tilde{r}_{is}-\lambda_2^{c}\left(\mu_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\mathbf{1}\right)=0, i=1,2,\cdots,n. \tag{19.a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}_f}{\partial\lambda_2}=1-w_{\boldsymbol{f}}^{c}(\boldsymbol{\alpha})^{T}\left(\mu_{\boldsymbol{i}}(\boldsymbol{\alpha})-r_f\right)=0. \tag{19.b}$$

ここで$\mu_i(\boldsymbol{\alpha})$は第$i$危険資産の期待収益率、$w_i^c(\boldsymbol{\alpha})$はCML上の第$i$危険資産の最適投資割合を表す。前節と同様に、経済状態$s$（$s=1,2,\cdots,S$）のときの第$i$危険資産の収益率$\tilde{r}_{is}$を決定すれば、危険資産の最適投資割合$\boldsymbol{w^e}(\boldsymbol{\alpha})$が決定される。

**定理**　曖昧でない経済における第$i$危険資産への最適投資割合を$w_i^c$、曖昧さのない経済における無危険資産への最適投資割合を$w_f^c$とする。このとき$\phi''<0$かつ$\sum_{s=1}^{S}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is})u'\left(\widetilde{W}_s\left(w_i^c(\boldsymbol{\alpha})\right)\right)$が、主観的確率$j$によって異なるならば、$\sum_{i=1}^{n}w_i^c(\boldsymbol{\alpha})\leq\sum_{i=1}^{n}w_i^c$、$w_f^c(\boldsymbol{\alpha})\geq w_f^c$である[9]。つまり曖昧な経済における危険資産への投資総割合は、曖昧でない危険資産への投資総割合よりも少なく、一方曖昧な経済における無危険資産への投資割合は、曖昧でない無危険資産への投資割合よりも多くなることを意味する。

**証明**　(19.a)式より、(20)式の$\delta\left(\boldsymbol{y_f^c}\right)$は曖昧な経済と曖昧さのない経済の評価差と定義する。

$$\delta(\boldsymbol{y_f^c})\equiv\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u\left(\widetilde{W}_s\left(w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})\right)\right)(\tilde{\boldsymbol{r}}_s-r_f)$$

$$-\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\phi\left(D_j(\boldsymbol{y_f^c})\right)\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u\left(\widetilde{W}_s\left(w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})\right)\right)(\tilde{\boldsymbol{r}}_s(\boldsymbol{\alpha})-r_f).\qquad(20)$$

ここで$\tilde{\boldsymbol{r}}_s$は状態$s$における危険資産の収益率を表す。(20)式の両辺を曖昧でない経済における危険資産の投資総割合$\boldsymbol{y_f^c}$で微分すると(21)式となる。

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\phi'\left(D_j(\boldsymbol{y_f^c})\right)\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u'\left(\widetilde{W}_s\left(w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})\right)\right)w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})^T(\tilde{\boldsymbol{r}}_s(\boldsymbol{\alpha})-r_f)$$

$$=\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u'\left(\widetilde{W}_s\left(w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})\right)\right)w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})^T(\tilde{\boldsymbol{r}}_s-r_f)-\delta'(\boldsymbol{y_f^c}).\qquad(21)$$

曖昧さ回避的な投資家について、危険資産への投資割合が増えるほど曖昧さによる評価損失が増えると仮定する。すなわち(22)式である。

$$\delta'\left(\boldsymbol{y_f^c}(\boldsymbol{\alpha})\right)\geq 0.\qquad(22)$$

この条件は危険資産への投資を追加したときの限界評価が曖昧な経済では曖昧さのない経済より小さいことを意味する。曖昧さのない経済における最適解$\boldsymbol{y_f^c}$は$(23.a)$式の1階条件と曖昧な経済における最適解$\boldsymbol{y_f^c}(\boldsymbol{\alpha})$は$(23.b)$式の1階条件である。

$$\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u'\left(\widetilde{W}_s\left(w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})\right)\right)w_f^c(\boldsymbol{y_f^c})^T(\tilde{\boldsymbol{r}}_s-r_f)=0.\qquad(23.a)$$

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, \phi' \left( D_j \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u' \left( \widetilde{W}_s \left( w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right) w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right)^T \left( \tilde{\boldsymbol{r}}_s(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \right) = 0, \quad (23.b)$$

(21)式の$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}} = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha})$を代入すると、(24)式である。

$$\sum_{j=1}^{m} \alpha_j \, \phi' \left( D_j \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u' \left( \widetilde{W}_s \left( w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right) w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right)^T \left( \tilde{\boldsymbol{r}}_s(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \right) = 0$$

$$= \sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u' \left( \widetilde{W}_s \left( w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}} \right) \right) \right) w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}} \right)^T \left( \tilde{\boldsymbol{r}}_s - r_f \right) - \delta' \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}} \right). \quad (24)$$

(22)式と(24)式から(25)式となる。

$$\sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u' \left( \widetilde{W}_s \left( w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right) w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right)^T \left( \tilde{\boldsymbol{r}}_s - r_f \right) = \delta' \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right). \quad (25)$$

$(23.a)$は厳密に凹であるから、限界評価$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}$は$y$の厳密な減少関数である。曖昧でない経済の最適点では$(23.a)$であり、曖昧な経済の最適点では(26)式となる。$(23.b)$は$y$の増加とともに減少し、$y = \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}$でゼロになるので、(26)式となる。

$$\sum_{s=1}^{S} p_s^{(j)} u' \left( \widetilde{W}_s \left( w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right) \right) \right) w_f^c \left( \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) \right)^T \left( \tilde{\boldsymbol{r}}_s - r_f \right) > 0. \quad (26)$$

曖昧さのない危険資産への最適投資総割合（最適点）$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}$において、曖昧な経済の限界評価がすでにゼロ以下であるならば、曖昧な経済における危険資産への最適投資総割合（最適点）$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha})$は$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}$より右側には存在しない。つまり

$$\boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}(\boldsymbol{\alpha}) < \boldsymbol{y}_{\boldsymbol{f}}^{\boldsymbol{c}}. \quad (27)$$

曖昧さのない経済では、投資家は既知の確率分布に基づいて危険資産の限界期待効用を評価する。これに対して曖昧な経済では、複数の確率分布の存在と凹な曖昧さ関数$\boldsymbol{\phi}$によって、危険資産を追加することの限界評価が引き下げられる。すなわち、危険資産の限界便益マイナス曖昧さの限界評価損失がゼロとなる点で投資が停止されるため、曖昧な経済ではより小さい危険資産への投資総割合で最適条件が満たされる。その結果、減少した危険資産投資分が予算制約を通じて無危険資産へ移される。

Q. E. D.

## 5. HARA 型効用関数と曖昧さ関数

中川（2026a）と同様に、曖昧な経済における HARA 型効用関数（Hyperbolic Absolute Risk Aversion Utility Function）を(29)式とする[10]。

$$u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\begin{cases} u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)^H \equiv \dfrac{1-\gamma}{\gamma}\left\{\left(\dfrac{\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}+\varsigma\right\}, \beta>0, \gamma\neq 0,1, & (29.1)\\ \lim\limits_{\gamma\to 0} u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)^H\Big|_{\zeta=-1} = ln\left(\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))+\eta\right), \quad \widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))+\eta>0 & (29.2)\\ \lim\limits_{\gamma\to -\infty} u\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))\right)^H\Big|_{\eta=1} = -\left(e^{-\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}))}+\zeta\right). & (29.3)\end{cases}$$

ここで$\gamma$、$\beta$、$\eta$、$\varsigma$はパラメータを表す。曖昧さのない経済における効用関数は(29)式の$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})$を$\boldsymbol{w}$とする。

また曖昧さ関数を(30)式とする。

$$\phi(D_j)=\begin{cases}\dfrac{u(D_j)^{1-\kappa}}{1-\kappa}, & \kappa\neq 1 \quad (30.1)\\ \ln\left(u(D_j)\right), & \kappa=1, \quad (30.2)\\ -e^{-\nu D_j}. & (30.3)\end{cases}$$

(29)式の効用関数と(30)式の曖昧さ関数でも、一般的に最適投資割合は閉形式ではなく、1 階条件を満たす非線形方程式の解となる。

効率的フロンティアの 1 階条件$(13.a)$式と(29)式と(30)式、またはCML の 1 階条件$(19.a)$式と(29)式と(30)式より、1 階条件は(31)式である。ここで(32)式と(33)式である。

$$\sum_{j=1}^{m}\alpha_j\,\phi'\left(D_j(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\sum_{s=1}^{S}p_s^{(j)}u'\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)\tilde{r}_{is}=\lambda_1^q\tilde{R}_{is},\quad i=1,2,\cdots,n. \tag{31}$$

ここで$q=e,c$を表し、$\phi'\left(D_j(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)$は(32)式である。

$$\begin{aligned}&\text{ベキ型曖昧さ関数のとき：}\phi'\left(D_j(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\left(D_j^q\right)^{-\kappa},\\ &\text{対数型曖昧さ関数のとき：}\phi'\left(D_j(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\left(D_j^q\right)^{-1},\\ &\text{負の指数型曖昧さ関数のとき：}\phi'\left(D_j(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\nu e^{\nu D_j^q}.\end{aligned} \tag{32}$$

また$u'\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)$は(33)式である。

$$\begin{aligned}&\text{ベキ型効用関数のとき：}u'\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\beta\left(\frac{\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma-1},\\ &\text{対数型効用関数のとき：}u'\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\frac{\beta}{\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))+\eta},\\ &\text{負の指数型型曖昧さ関数のとき：}u'\left(\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))\right)=\beta e^{-\beta\widetilde{W}_s(\boldsymbol{w}^{\boldsymbol{q}}(\boldsymbol{\alpha}))}.\end{aligned} \tag{33}$$

効率的フロンティアの場合は$\tilde{R}_{is}=1$、CML の場合は$\tilde{R}_{is}=\mu_i(\boldsymbol{\alpha})-r_f$である。

## 6. 数値例

表 1.1　曖昧な経済における最適投資割合とポートフォリオのボラティリティと期待収益率
$(r_f = 3\%, \gamma = \kappa = 0.5, \beta = 40, \nu = 1, \eta = 3, \zeta = -2)$

| 効率的フロンティア | | $y^e(\boldsymbol{\alpha})$ | $w_1^e$ | $w_2^e$ | $w_3^e$ | $w_f^e$ | $\sigma_p^e$ | $\mu_p^e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ベキ型効用関数 | ベキ型曖昧さ関数 | | 50.8768% | 29.6842% | 19.4390% | | 9.8246% | 7.5500% |
| | 対数型曖昧さ関数 | | 51.1379% | 29.4728% | 19.3892% | | 9.8048% | 7.5415% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | | 51.0099% | 29.5764% | 19.4137% | | 9.8144% | 7.5456% |
| 対数型無差別関数 | ベキ型曖昧さ関数 | | 52.8274% | 28.7421% | 18.4305% | | 9.6440% | 7.4757% |
| | 対数型曖昧さ関数 | | 52.8750% | 28.7048% | 18.4202% | | 9.6405% | 7.4742% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | | 52.9337% | 28.6587% | 18.4076% | | 9.6363% | 7.4722% |
| 負の指数型効用関数 | ベキ型曖昧さ関数 | | 55.0789% | 27.1868% | 17.7343% | | 9.4771% | 7.3980% |
| | 対数型曖昧さ関数 | | 55.0824% | 27.1840% | 17.7335% | | 9.4769% | 7.3979% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | | 55.0870% | 27.1805% | 17.7326% | | 9.4766% | 7.3978% |
| CML | | $y^c(\boldsymbol{\alpha})$ | $w_1^c$ | $w_2^c$ | $w_3^c$ | $w_f^c$ | $\sigma_p^c$ | $\mu_p^c$ |
| ベキ型効用関数 | ベキ型曖昧さ関数 | 12.1013% | 148.6687% | 80.4553% | 45.5263% | −174.6503% | 26.0310% | 15.1013% |
| | 対数型曖昧さ関数 | 12.0661% | 148.2353% | 80.2208% | 45.3937% | −173.8498% | 25.9552% | 15.0661% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | 12.0685% | 148.2656% | 80.2372% | 45.4029% | −173.9057) | 25.9605% | 15.0685% |
| 対数型無差別関数 | ベキ型曖昧さ関数 | 7.7006% | 94.6044% | 51.1973% | 28.9704% | −74.7721% | 16.5647% | 10.7006% |
| | 対数型曖昧さ関数 | 7.6917% | 94.4950% | 51.1380% | 28.9369% | −74.5699% | 16.5455% | 10.6917% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | 7.6802% | 94.3540% | 51.0618% | 28.8937% | −74.3096% | 16.5209% | 10.6802% |
| 負の指数型効用関数 | ベキ型曖昧さ関数 | 0.9035% | 11.1002% | 6.0071% | 3.3992% | 79.4935% | 1.9436% | 3.9035% |
| | 対数型曖昧さ関数 | 0.9034% | 11.0989% | 6.0064% | 3.3988% | 79.4958% | 1.9434% | 3.9034% |
| | 負の指数型曖昧さ関数 | 0.9033% | 11.0970% | 6.0054% | 3.3982% | 79.4993% | 1.9430% | 3.9033% |

表 1.2　曖昧さのない経済における最適投資割合とポートフォリオのボラティリティと期待収益率
$(r_f = 3\%, \gamma = \kappa = 0.5, \beta = 40, \nu = 1, \eta = 3, \zeta = -2)$

| 効率的フロンティア | $y^e$ | $w_1^e$ | $w_2^e$ | $w_3^e$ | $w_f^e$ | $\sigma_p^e$ | $\mu_p^e$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| ベキ型効用関数 | | 53.0114% | 27.9745% | 19.0141% | | 9.5887% | 7.3201% |
| 対数型無差別関数 | | 54.9388% | 27.0867% | 17.9746% | | 9.4132% | 7.2607% |
| 負の指数型効用関数 | | 55.6379% | 26.7455% | 17.6167% | | 9.3541% | 7.2396% |
| CML | $y^c$ | $w_1^c$ | $w_2^c$ | $w_3^c$ | $w_f^c$ | $\sigma_p^c$ | $\mu_p^c$ |
| ベキ型効用関数 | 10.2837% | 149.0786% | 62.1161% | 38.6500% | −149.8446% | 22.6058% | 13.2837% |
| 対数型無差別関数 | 6.7126% | 97.3102% | 40.5459% | 25.2286% | −63.0846% | 14.7558% | 9.7126% |
| 負の指数型効用関数 | 0.8484% | 12.2985% | 5.1244% | 3.1885% | 79.3886% | 1.8649% | 3.8484% |

4 経済状態の 3 危険資産の収益率を(34)式とする。

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{14} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} & \tilde{r}_{24} \\ \tilde{r}_{31} & \tilde{r}_{32} & \tilde{r}_{33} & \tilde{r}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\% & 16\% & -4\% & -4\% \\ 28\% & -12\% & 28\% & -12\% \\ 40\% & -20\% & -20\% & 40\% \end{bmatrix}. \tag{34}$$

このとき曖昧さなしの経済における期待収益率は、$\mu^T = [6\% \quad 8\% \quad 10\%]$である。たとえば各$j = 1,2,3,4$について、各危険資産の主観的確率を(35)式とする。

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{1s}) &= \begin{bmatrix} 9/40 & 3/10 & 9/40 & 1/4 \\ 9/40 & 13/40 & 1/5 & 1/4 \\ 7/40 & 9/20 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}, \qquad \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{2s}) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \\ \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{3s}) &= \begin{bmatrix} 21/80 & 9/40 & 21/80 & 1/4 \\ 21/80 & 17/80 & 11/40 & 1/4 \\ 23/80 & 3/20 & 5/16 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{4s}) = \begin{bmatrix} 11/40 & 1/5 & 11/40 & 1/4 \\ 11/40 & 7/40 & 3/10 & 1/4 \\ 13/40 & 1/20 & 3/8 & 1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{35}$$

ここで曖昧さの程度$\mho_i$、加重$\alpha_i, (i = 1,2,3,4)$、状態確率$\boldsymbol{p}^{(j)}\left(4 \times 4 \text{ 行列}\right)$、危険資産の収益率の共分散$\Sigma(\boldsymbol{\alpha})$は中川 (2026b) の(50)式を参照 [11]。曖昧な経済おける加重後の期待収益率は、$\mu^T = [6\% \quad 8\% \quad 10\%]$である。

無危険利子率$r_f = 3\%$、$\gamma = \kappa = 0.5$、$\beta = 40$、$\nu = 1$、$\eta = 3$、$\zeta = -2$とするとき、曖昧さの有無による効率的フロンティアと CML 上の各危険資産の最適投資割合とそのときのポートフォリオの期待収益率とボラティリティは表 1 である。

## 7. おわりに

本稿は、曖昧さにおける投資の曖昧さ調整期待効用最大化問題を考察した。これまで曖昧さのない経済を考えてきたファイナンス問題では、投資の期待効用最大化問題であった。曖昧さの有無による最適投資割合の差は、主観的確率分布をどれだけ信用するかが内生的に変わることにある。つまり曖昧さのない経済では、主観的確率は 1 つであり、曖昧な経済では、主観的確率が複数あり、曖昧さのない場合に比べ、危険資産の期待収益率が割り引かれ、ボラティリティはリスクと曖昧さにたいして二重に効き、危険資産の投資総割合は減少することを明らかにした。本稿の分析により、個々人の意思決定が完全に主観的に決定できることになった。つまりこれまでは曖昧さのない経済において、唯一の確率に基づく期待効用最大化問題であったが、その唯一の確率は主観的確率であったかは疑わしかった。その確率はたとえば、客観的確率であるという仮定であったかもしれない。その観点から、個々人の意思決定が主観的確率に基づく曖昧さ調整期待効用最大化問題になった点で画期的になったと理解する。

## 注

[1] 確率分布の平均（期待値）は、一定のまま、分散が大きくなるように分布を変化させる手法である。KMM (2005)、Nau (2006)、Chew and Sagi (2008) は、曖昧さに対する態度を期待効用（または確実性等価）の平均保存スプレッドにたいする態度と定義している。

[2] または確実性等価理論（CEP：Certainty Equivalent Problem）である。

[3] 期待ペイオフ $= \frac{1}{2}(0 + \$100\text{ 万}) = \$50\text{ 万}$、リスク $= \sqrt{\frac{1}{2}\{(0 - \$50\text{ 万})^2 + (\$100\text{ 万} - \$50\text{ 万})^2\}} = \$5\sqrt{2}$ 万から期待ペイオフ $= \frac{1}{2}(0 + \$200\text{ 万}) = \$100\text{ 万}$、

リスク $= \sqrt{\frac{1}{2}\{(0 - \$100\text{ 万})^2 + (\$200\text{ 万} - \$100\text{ 万})^2\}} = \$10\text{ 万}$。

[4] Izhakian (2020) の Appendix の Lemma 3 より、「$h: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$をある関数とする。このとき、任意の$a \leq x \leq b$にたいして、$x$の確率のボラティリティは$h(x)$と無相関である。すなわち $\mathrm{Cov}\big[h(x), \mathrm{Var}[\varphi(x)]\big] = 0$は

$$\mathrm{E}[h(x)\mathrm{Var}[\varphi(x)]|a \leq x \leq b] = \mathrm{E}[h(x)|a \leq x \leq b]\mathrm{E}[\mathrm{Var}[\varphi(x)]|a \leq x \leq b].$$

を意味する。」

[5] Izhakian (2017) は$\alpha_j = 1/m$とする。特に Izhakian (2017) は$m = 3$としている。証明はのちの「定理」で行う。

[6] 本稿では$\omega_i^{(j)}$を外生的に与える。曖昧さの程度$\mathfrak{V}$で内包化しているからである。$\omega_i^{(j)}$を内生的に、投資家が選ぶと、$\omega_i^{(j)}$が大きい資産に集中することになるためである。$\boldsymbol{\omega}^{(j)}$は$\omega_i^{(j)}$の$n \times 1$行列を表す。

[7] その際、最適投資割合$\boldsymbol{w^e(\alpha)}$は効率的フロンティア上に存在する。

[8] 曖昧さのない経済における変数は・$(\boldsymbol{\alpha})$の$(\boldsymbol{\alpha})$を削除した変数である。

[9] 曖昧さのない経済における主観的確率群は 1 つであり、(1)式から(4)式で$m = 1$であり、$\alpha_1 = 1$となる。

[10] Ingersoll (1987) と Merton (1969) は下記の HARA 型効用関数を設定している。

$$u(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \gamma \neq 1, \quad \beta > 0, \quad \frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta > 0.$$

ここで$\gamma$、$\beta$、$\eta$はパラメータを表す。しかし彼らが考える上記の関数のパラメータ操作によって、明確に対数型関数を導出することはできない。

[11] 曖昧さのない経済における値は中川 (2026b) の注 12 を参照。

## 参考文献


中川裕司, 2026a,「曖昧な経済における不確実性回避度と曖昧性プレミアムとの関係」, 岐阜協立大学『岐阜協立大学論集』, 59(2), pp. 47-70.

中川裕司, 2026b,「曖昧な経済におけるマーコビッツモデル」, 岐阜協立大学『岐阜協立大学論集』60(1), pp. 37-48.

Brenner, M., Y. Izhakian, and O. Sade, 2011, "Ambiguity and Overconfidence," https://archive.nyu.edu/bitstream/2451/31332/2/Ambg%2011-2-28.F.pdf.

Chew, S. H. and J. S. Sagi, 2008, "Small Worlds: Modeling Attitudes toward Sources of Uncertainty," *Journal of Economic Theory*, 139(1), pp. 1-24.

Gilboa, I., and Schmeidler, D, 1989, "Maxmim Expected Utility with Non-unique Prior," *Journal of Mathematical Economics*, 18(2), pp. 141-153.

Ingersoll, J. E., Jr, 1987, *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, Totowa, New Jersey.

Izhakian, Y., 2017, "Expected Utility with Uncertain Probability Theory," *Journal of Mathematical Economics*, 69(1), pp.91-103.

Izhakian, Y., 2020, "A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement," *Journal of Economic Theory*, 187, 105001.

Izhakian, Y., and S. Benninga, 2011, "The Uncertainty Premium in an Ambiguous Economy," *The Quarterly Journal of Finance*, 1(2), pp.323-354.

Klibanoff, P., M. Marinacci, and S. Mukerji, 2005, "A Smoothing Model of Decision Making under Ambiguity," *Econometrica*, 73(6), pp.1849-1892.

Merton, R. C, 1969, "Lifetime Portlfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case," *Review of Economics and Statistics*, 51(3), pp. 247-257. Reprinted in *Continuous-Time Finance*, 1990, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts.

Nau, R. F., 2006, "Uncertainty Aversion with Second-Order Utilities and Probabilities," *Management Science*, 52(1), pp.136-145.

Rothschild, M. and J. E. Stiglitz, 1970, "Increasing Risk: I. A Definition," *Journal of Economic Theory*, 2(3), pp.225-243.

Schmeidler, D., 1989, "Subjective Probability and Expected Utility without Additivity," *Econometrica*, 57(3), pp. 571-587.

Tversky, A., and D. Kahneman, 1981, "The Framing of Decisions and Psychology of Choice," *Science*, 211(4481), pp.453-485.