岐阜協立大学論集 60 巻 1 号（2026 年）
The Journal of Gifu Kyoritsu University, Vol.60, No.1（2026）

曖昧な経済におけるマーコヴィッツモデル

中川　裕司（岐阜協立大学経営学部）

キーワード：主観的確率、曖昧さ、マーコヴィッツ、効率的フロンティア、資本市場線

１．はじめに

これまで「不確実性」ということばには、リスクとともに曖昧さを含んでいたはずであった。ここでいう「リスク」とは、将来の現象が「既知」であるが、その確率が不確定であることを意味し、一方、「曖昧さ」は、将来の現象が「未知」であり、かつその確率も不確定であることを意味する。この区別は、Kinght（1921）の不確実性の問題提起から始まる。中川（2026）は、曖昧な経済における不確実性（リスクと曖昧さ）回避度と曖昧さプレミアムとの関係を考察した。

現在ファイナンスの根幹となっている Markowitz（1952）のポートフォリオ選択理論は、リスクが存在するが、曖昧さが存在しない理論であった。本稿では、曖昧な経済における Markowitz のポートフォリオ選択理論（以下、拡張版 Markowitz モデル）を再考して、これまでの古典的 Markowitz モデルとの相違を明らかにすることにある。拡張版 Markowitz モデルの構造は、古典的 Markowitz モデルの構造と同型だが、収益率の共分散が、曖昧さの程度から影響を受ける第一段階で曖昧さの程度を加味して決定され、第二段階でポートフォリオの収益率の分散を最小にする。その結果、拡張版 Markowitz モデルの効率的フロンティア（Efficient Frontier）または資本市場線（CML：Capital Market Line）が古典的 Markowitz モデルの効率的フロンティアまたは資本市場線の内側に入ることを明らかにする。さらに、資本資産価格評価モデル(CAPM：Capital Asset Pricing Model)[1]と Sharpe（1966）によるシャープ比率での相違を明らかにする。

次節では、曖昧な経済における危険資産からなる拡張版 Markowitz モデルの解、すなわち効率的フロンティアを求め、第３節では、曖昧な経済における CML を求める。第４節では、曖昧さの有無による CAPM とシャープ比率を求め、第５節では、数値例を示す。

2.　曖昧な経済における効率的フロンティア

曖昧さの程度が、関連する事象の確率の期待変動率（Expected Volatility of Probability）によって測定できることを、Izhakian（2017）は示した。つまりリスクの程度が、「結果」のボラティリティで測定できるのと同様に、曖昧さの程度は、「確率」のボラティリティで測定できることを、Wakker（2010, 2023）と同様に Izhakian（2017 など）は提案する。したがって意思決定者が、不確実な結果よりも、不確実な「結果の期待値」を好むときに、リスク回避が示されるのと類似して、意思決定者が不確実な（確率の集合から引き出された）確率よりも、不確実な「確率のボラティリティ」を嫌うとき、曖昧さ回避が指摘される。

(1)式の曖昧さの程度υ_j（モー）は、第j番目の主観的確率群（モデル）がどれだけ曖昧かを意味し、複数の主観的確率のボラティリティを表す。つまり主体の確率評価が、全体の確率の平均からどれだけ離れているかを意味する。

$$\upsilon_j = \sqrt{\sum_{i=1}^{n}\left\{\sum_{s=1}^{S}\left(\frac{\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is})}{\sum_{l=1}^{m}\mathrm{P}_l(\tilde{r}_{is})}\right)\left(\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is}) - E[\mathrm{P}(\tilde{r}_{is})]\right)^2\right\}}, \quad j = 1,2,\cdots,m. \tag{1}$$

ここでυ_jが大きいモデルほど、信用を下げるということである。υ_jが小さいモデルは、比較的安定し

ているため、(2)式の第j番目の曖昧さの程度の重み（加重）α_jを大きくし、$\mho_j$が大きいモデルでは、信頼しにくいため、加重α_jを小さくするということを意味する。そのため$\mho_j$が大きいほど、そのモデルの影響力を弱めることを意味し、まず意思決定者は(2)式のα_jを決定すると仮定する。

$$\alpha_j = \frac{1/\mho_j}{\sum_{i=1}^{m} \mho_i}. \tag{2}$$

ここでα_jは主観的確率$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{is})$がどれだけ重視されるかを示す重みを意味し[2]，(3)式のΔ_mは、m次元単体を表す。

$$\boldsymbol{\alpha} \in \Delta_m. \tag{3}$$

ただし(4)式とする。

$$\Delta_m = \left\{ \boldsymbol{\alpha} \in \mathbb{R}^{\boldsymbol{m}} \middle| \sum_{\boldsymbol{j=1}}^{\boldsymbol{m}} \alpha_j = 1, \alpha_j \geq 0 \right\}. \tag{4}$$

Brenner and Izhakian (2018) は、2つのケースを挙げて説明する。投資家が、1種類の危険資産の将来の収益率の2つの可能な経済状態（不況=1, 好況=2）を想定している。彼らは、収益率を$\tilde{r}_1 = -10\%$と$\tilde{r}_2 = 20\%$と予測する投資問題を考える。ケース 1 では、$\tilde{r}_1$と$\tilde{r}_2$の主観的確率$\mathrm{P}_0(\cdot)$は、既知であり、$\mathrm{P}_0(\tilde{r}_1) = \mathrm{P}_0(\tilde{r}_2) = 0.5$と仮定する。そのとき投資家の主観的期待収益率は5%であり[3]、資産の収益率の主観的リスク（ボラティリティ(標準偏差)）は15%である[4]。この場合、主観的確率が1つしかなく、既知であるので、曖昧さは存在せず、$\mho = 0$であり、投資家はリスクだけに直面する。ケース2では、3つの経済状態での主観的確率群$(\mathrm{P}_s(\tilde{r}_i), s = 1,2,3, i = 1,2)$を仮定し、$\mathrm{P}_1(\tilde{r}_1) = 0.4$と$\mathrm{P}_1(\tilde{r}_2) = 0.6$、$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_1) = 0.5$と$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_2) = 0.5$、あるいは$\mathrm{P}_3(\tilde{r}_1) = 0.6$と$\mathrm{P}_3(\tilde{r}_2) = 0.4$と仮定すると、リスクだけではなく、曖昧さにも直面する。このとき$\tilde{r}_1$と$\tilde{r}_2$の主観的期待確率は同じ0.5であり[5]、投資家の主観的期待収益率は5%であり[6]、曖昧さの程度$\mho$は15%である[7]。

Brenner and Izhakian (2018) の例を、より一般的にS個の経済状態と想定し、各経済状態でm種類の主観的確率群が出現するときの、第k番目の資産の経済状態×主観的確率群行列$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})$を示すと、表 1 となる。つまり表1は、第$k$番目の危険資産の収益率への主観的確率モデル$j$と経済状態$s$の主観的確率を$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})$と表す。

S個の経済状態を想定し、各経済状態でm種類の主観的確率群が出現するとき、(5)式は第k番目$(k = 1,2,\cdots,n)$の危険資産の期待収益率であり、(6)式は収益率のボラティリティである。

$$\mu_k = \sum_{s=1}^{S} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})}{\sum_{l=1}^{m} \left(\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{kl}) \right)} \right) \mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks}) \tilde{r}_{ks} \right\}. \tag{5}$$

$$\sigma(\tilde{r}_k) = \sqrt{\sum_{s=1}^{S} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(\frac{\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})}{\sum_{l=1}^{m} \left(\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{kl}) \right)} \right) \mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks}) (\tilde{r}_{ks} - E[\tilde{r}_k])^2 \right\}}. \tag{6}$$

ここで(5)式と(6)式は、$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks}) / \sum_{l=1}^{m} \left(\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{kl}) \right)$によって正規化を行っている。

つぎに(2)式から(4)式の$\boldsymbol{\alpha}$を使って、m個の主観的確率の加重を考慮した危険資産の収益率の共分散行列$\Sigma(\boldsymbol{\alpha})$（$n \times n$行列）による効率的フロンティアを求める[8]。

拡張版 Markowitz モデルの構造は、古典的 Markowitz モデルの構造と同型だが、曖昧さの程度から影響を受ける第一段階で、$\mho$を加味して、収益率の共分散を決定する。つまり(2)式から(4)式で、まず$\boldsymbol{\alpha}$を決定し、第二段階でポートフォリオの収益率の分散を最小にする。すなわち(7)式の目的関数では、すでに$\mho$より$\boldsymbol{\alpha}$は決定していることになり、(7)式から(9)式の拡張版 Markowitz モデルを考える。

$$\min_{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^n} \{ \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}) \}, \tag{7}$$

Subject to

表１　第k番目の危険資産への主観的確率モデルj×経済状態sの確率

		経済状態						
	収益率	$\tilde{r}_{k1}$	$\tilde{r}_{k2}$	…	$\tilde{r}_{ks}$	…	$\tilde{r}_{kS}$	計
主観的確率群	1	$\mathrm{P}_1(\tilde{r}_{k1})$	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{k2})$	…	$\mathrm{P}_1(\tilde{r}_{ks})$	…	$\mathrm{P}_1(\tilde{r}_{kS})$	1
	2	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{k1})$	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{k2})$	…	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{ks})$	…	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{kS})$	1
	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
	j	$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{k1})$	$\mathrm{P}_2(\tilde{r}_{k2})$	…	$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})$	…	$\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{kS})$	1
	⋮	⋮	⋮	…	⋮	…	⋮	⋮
	m	$\mathrm{P}_m(\tilde{r}_{k1})$	$\mathrm{P}_m(\tilde{r}_{k2})$	…	$\mathrm{P}_m(\tilde{r}_{ks})$	…	$\mathrm{P}_m(\tilde{r}_{kS})$	1
計		$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{k1})$	$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{k2})$	…	$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ks})$	…	$\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{kS})$	$\sum_{i=1}^{S}\sum_{j=1}^{m}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ki})=m$

※　$\sum_{i=1}^{S}\mathrm{P}_j(\tilde{r}_{ki})=1 \quad j=1,2,\dots,m.$

$$1=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1}, \tag{8}$$

$$\mu_p(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{9}$$

ここで$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済における危険資産への投資割合（$n\times1$行列）$\mathbf{1}$は1の$n\times1$行列を表す。ポートフォリオの期待収益率は(9)式の$\mu_p(\boldsymbol{\alpha})$、$\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})$は危険資産の期待収益率（$n\times1$行列）を表す。

ラグランジュ乗数をλ_1とλ_2すると、ラグラジュアン$\mathcal{L}$は(10)式となる。

$$\mathcal{L}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}),\lambda_1,\lambda_2:\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_1\left(\mu_p(\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})\right)+\lambda_2(1-\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1}). \tag{10}$$

(10)式を$\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})$と$\lambda_1$と$\lambda_2$で編微分してゼロとおいて、効率的フロンティア上の最適投資割合を$\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})$と$\lambda_1$の最適値を$\lambda_1^e$と$\lambda_2$の最適値を$\lambda_2^e$すると、1階条件は(11)式となる。

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}),\lambda_1,\lambda_2:\boldsymbol{\alpha})}{\partial\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})}=2\Sigma(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})-\lambda_1^e\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})-\lambda_2^e\mathbf{1}=0. \tag{11.a}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}),\lambda_1,\lambda_2:\boldsymbol{\alpha})}{\partial\lambda_1}=\mu_p(\boldsymbol{\alpha})-\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})=0. \tag{11.b}$$

$$\frac{\partial\mathcal{L}(\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha}),\lambda_1,\lambda_2:\boldsymbol{\alpha})}{\partial\lambda_2}=1-\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1}=0. \tag{11.c}$$

(11)式から最適投資割合は(12)式となる[9]。

$$1=\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1}=\frac{1}{2}\left(\lambda_1^eA(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_2^eB(\boldsymbol{\alpha})\right), \tag{12.a}$$

$$\mu_p^e=\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})=\frac{1}{2}\left(\lambda_1^eC(\boldsymbol{\alpha})+\lambda_2^eB(\boldsymbol{\alpha})\right). \tag{12.b}$$

ここで(13)式である。

$$A(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\mathbf{1},\qquad B(\boldsymbol{\alpha})=\mathbf{1}^T\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}),\qquad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{\alpha})=\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\Sigma^{-1}(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}). \tag{13}$$

(12)式より、(14)式となる。

$$\lambda_1^e=\frac{2\left(A(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e-B(\boldsymbol{\alpha})\right)}{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}, \tag{14.a}$$

$$\lambda_2^e=\frac{2\left(C(\boldsymbol{\alpha})-B(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e\right)}{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}. \tag{14.b}$$

ここで

$$\Theta(\boldsymbol{\alpha})=A(\boldsymbol{\alpha})C(\boldsymbol{\alpha})-B^2(\boldsymbol{\alpha}). \tag{15}$$

よって危険資産への最適投資割合は(16)式となる。

$$\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})=\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\left\{\frac{C(\boldsymbol{\alpha})-B(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha})}{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}\mathbf{1}+\frac{A(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha})-B(\boldsymbol{\alpha})}{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})\right\}. \tag{16}$$

(16)式をポートフォリオの分散に代入すると(17)式となる。

$$\sigma_p^e(\boldsymbol{\alpha})^2=\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})=\frac{A(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha})^2-2B(\boldsymbol{\alpha})\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha})+C(\boldsymbol{\alpha})}{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}. \tag{17}$$

(17)式より、効率的フロンティアは(18)式となる。

$$\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha}) = =\frac{B(\boldsymbol{\alpha})}{A(\boldsymbol{\alpha})} \pm \sqrt{\frac{\Theta(\boldsymbol{\alpha})}{A(\boldsymbol{\alpha})}\left(\sigma_p^e(\boldsymbol{\alpha})^2 - \frac{1}{A(\boldsymbol{\alpha})}\right)}. \tag{18}$$

また曖昧な経済における最小分散ポートフォリオの収益率のボラティリティ$\sigma_{mvp}(\boldsymbol{\alpha})$と期待収益率$\mu_{mvp}(\boldsymbol{\alpha})$は、(19)式である。

$$\left(\sigma_{mvp}(\boldsymbol{\alpha}),\ \mu_{mvp}(\boldsymbol{\alpha})\right) = \left(\frac{1}{\sqrt{A(\boldsymbol{\alpha})}},\ \frac{B(\boldsymbol{\alpha})}{A(\boldsymbol{\alpha})}\right). \tag{19}$$

定理　拡張版Markowitzモデルの効率的フロンティアは、古典的Markowitzモデルの効率的フロンティアの内側に入る。

証明　曖昧さの有無による危険資産の収益率の共分散の関係は、不確実性の差異により、(20)式である。

$$\Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \succcurlyeq \Sigma. \tag{20}$$

ここでΣは曖昧さのない経済における危険資産の収益率の共分散行列（$n \times n$行列）を表す。曖昧さのない経済における最小分散ポートフォリオの投資割合を$\boldsymbol{w_{mvp}}$（$n \times 1$行列）として、(20)式の両側に$\boldsymbol{w_{mvp}}$を掛けると(21)式となる。

$$\boldsymbol{w}_{mvp}^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_{mvp}} \geq \boldsymbol{w}_{mvp}^T \Sigma \boldsymbol{w_{mvp}} = \sigma_{mvp}^2. \tag{21}$$

ここでσ_{mvp}は曖昧さのない経済での最小分散ポートフォリオの収益率のボラティリティを表す。さらに曖昧な経済における最小分散ポートフォリオの投資割合を$\boldsymbol{w_{mvp}}(\boldsymbol{\alpha})$として、(20)式の両側に$\boldsymbol{w_{mvp}}(\boldsymbol{\alpha})$を掛けると(22)式となる。

$$\sigma_{mvp}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{w}_{mvp}^T(\boldsymbol{\alpha}) \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_{mvp}}(\boldsymbol{\alpha}) \geq \boldsymbol{w}_{mvp}^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_{mvp}}. \tag{22}$$

ここで$\sigma_{mvp}(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済における最小分散ポートフォリオの収益率のボラティリティを表す。(21)式と(22)式より、(23)式が成り立つ。

$$\sigma_{mvp}^2(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{w_{mvp}}(\boldsymbol{\alpha}) \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_{mvp}}(\boldsymbol{\alpha}) \geq \boldsymbol{w}_{mvp}^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_{mvp}} \geq \boldsymbol{w}_{mvp}^T \Sigma \boldsymbol{w_{mvp}} = \sigma_{mvp}^2. \tag{23}$$

等号が成り立つ必要十分条件は(24)式が成立するときである。

$$\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \mu, \qquad \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \Sigma. \tag{24}$$

Q. E. D.

3.　曖昧な経済における資本市場線

(1)式から(4)式の曖昧さの程度$\mho_j$から加重α_jを求めて、(8)式に代わって(26)式として、曖昧な経済におけるCMLを(25)式と(26)式より考える。

$$\min_{\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}) \in \mathbb{R}^n} \left\{ \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})^T \Sigma_f(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}) \right\}, \tag{25}$$

Subject to

$$1 = \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})^T \left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \mathbf{1} \right). \tag{26}$$

ここでr_fは無危険利子率、$\boldsymbol{\Sigma_f}(\boldsymbol{\alpha})$は無危険資産を含む曖昧な経済における危険資産の収益率の共分散、$\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})$は危険資産の投資割合を表す。ラグランジュ乗数を$\lambda_3$とするとき、ラグラジュアン$\mathcal{L}_c$は(27)式となる。

$$\mathcal{L}_c\left(\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}), \lambda_3\right) = \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})^T \Sigma_f(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_3 \left(\mathbf{1} - \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})^T \left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \mathbf{1} \right) \right). \tag{27}$$

(27)式を$\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})$と$\lambda_3$で偏微分してゼロとおいて、CML上の最適投資割合を$\boldsymbol{w_f^c}(\boldsymbol{\alpha})$と$\lambda_3$の最適値を$\lambda_3^c$として、1階条件を求めると、(28)式となる。

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c\left(\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}), \lambda_3 : \boldsymbol{\alpha}\right)}{\partial \boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})} = 2\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w_f^c}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_3^c \left(r_f \mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) \right) = \mathbf{0}. \tag{28.a}$$

$$\frac{\partial \mathcal{L}_c\left(\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha}), \lambda_3 : \boldsymbol{\alpha}\right)}{\partial \lambda_3} = r_f \mathbf{1} - \boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) = \mathbf{0}. \tag{28.b}$$

(28.a)式より$\boldsymbol{w_f^c}(\boldsymbol{\alpha})$を求めると、(29)式となる。

$$\boldsymbol{w}_f^c(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\lambda_3^c}{2}\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big). \tag{29}$$

(29)式の$\boldsymbol{w}_f^c(\boldsymbol{\alpha})$を(26)式の$\boldsymbol{w_f}(\boldsymbol{\alpha})$に代入し、整理すると(30)式となる。

$$\frac{\lambda_3^c}{2} = \frac{1}{\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}. \tag{30}$$

(30)式を(29)式に代入すると(31)式となる。

$$\boldsymbol{w}_f^c(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}{\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}. \tag{31}$$

このときの無危険資産を含む最適ポートフォリオのボラティリティ$\sigma_f^c(\boldsymbol{\alpha})$と期待収益率$\mu_f^c(\boldsymbol{\alpha})$は(32)式となる。

$$\big(\sigma_f^c(\boldsymbol{\alpha}),\ \mu_f^c(\boldsymbol{\alpha})\big) = \left(\frac{1}{\sqrt{\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}},\ \frac{\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}{\sqrt{\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}}\right). \tag{32}$$

接点フロンティアは効率的フロンティア上にもあるので、(33)式を満たす。

$$\boldsymbol{w_T}(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1} = 1. \tag{33}$$

また接点ポートフォリオの曖昧な経済における接点ポートフォリオの危険資産への投資割合$\boldsymbol{w_T}$を求めると、(34)式となる。

$$\boldsymbol{w_T}(\boldsymbol{\alpha}) = \Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\mu_T(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\big). \tag{34}$$

CML は(35)式となる。

$$\begin{aligned}\mu_p^c(\boldsymbol{\alpha}) &= r_f + \frac{\boldsymbol{\mu}_T(\boldsymbol{\alpha}) - r_f}{\sigma_T(\boldsymbol{\alpha})}\sigma_p^c(\boldsymbol{\alpha}) = r_f + \sqrt{\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}\sigma_p^c(\boldsymbol{\alpha})\\ &= \big(1 - y^c(\boldsymbol{\alpha})\big)r_f + y^c(\boldsymbol{\alpha})\mu_T(\boldsymbol{\alpha}) = r_f + y^c(\boldsymbol{\alpha})\big(\mu_T(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\big).\end{aligned} \tag{35}$$

ここで$\mu_p^c(\boldsymbol{\alpha})$は CML 上のポートフォリオの期待収益率、$\mu_T(\boldsymbol{\alpha})$は接点ポートフォリオの期待収益率、$\sigma_T(\boldsymbol{\alpha})$は接点ポートフォリオのボラティリティ、$\sigma_p^c(\boldsymbol{\alpha})$は CML 上のポートフォリオの収益率のボラティリティとすると、(36)式となる。

$$\begin{aligned}\mu_T(\boldsymbol{\alpha}) &= \boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}).\\ \sigma_T(\boldsymbol{\alpha}) &= \sqrt{\boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha})^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha})}.\end{aligned} \tag{36}$$

(33)式を$\boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha})^T\mathbf{1}$で割って、(31)式を代入すると(37)式となる。

$$\boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\boldsymbol{w}_f^c(\boldsymbol{\alpha})}{\mathbf{1}^T\boldsymbol{w}_f^c(\boldsymbol{\alpha})} = \frac{\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}{\mathbf{1}^T\Sigma_f(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\big(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\mathbf{1}\big)}. \tag{37}$$

(35)式より(38)式となる。

$$y^c(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mu_p^c(\boldsymbol{\alpha}) - r_f}{\mu_T(\boldsymbol{\alpha}) - r_f}. \tag{38}$$

ここで無危険資産への最適投資割合は$1 - y^c(\boldsymbol{\alpha})$である。無危険資産のボラティリティはゼロなので、CML 上のポートフォリオの収益率のボラティリティは(39)式となる。

$$\sigma_p^c(\boldsymbol{\alpha}) = y^c(\boldsymbol{\alpha})\sigma_T(\boldsymbol{\alpha}). \tag{39}$$

また曖昧な経済における効率的フロンティアは、曖昧でない経済における効率的フロンティアの内側になるので、曖昧な経済における CML は曖昧さのない経済における CML の内側になる。つまり曖昧さは不確実性の評価を厳しくし、同じ超過期待収益に対して必要な不確実性を増やすため、不確実性 1 単位あたりの報酬（傾き）は、下がることを意味する。

4. CAPM とシャープ比率

CAPM の型は、曖昧さの有無による経済とは無関係で同じ型であるが、βとリスクプレミアムは歪む。古典的な CAPM は(40)式である。

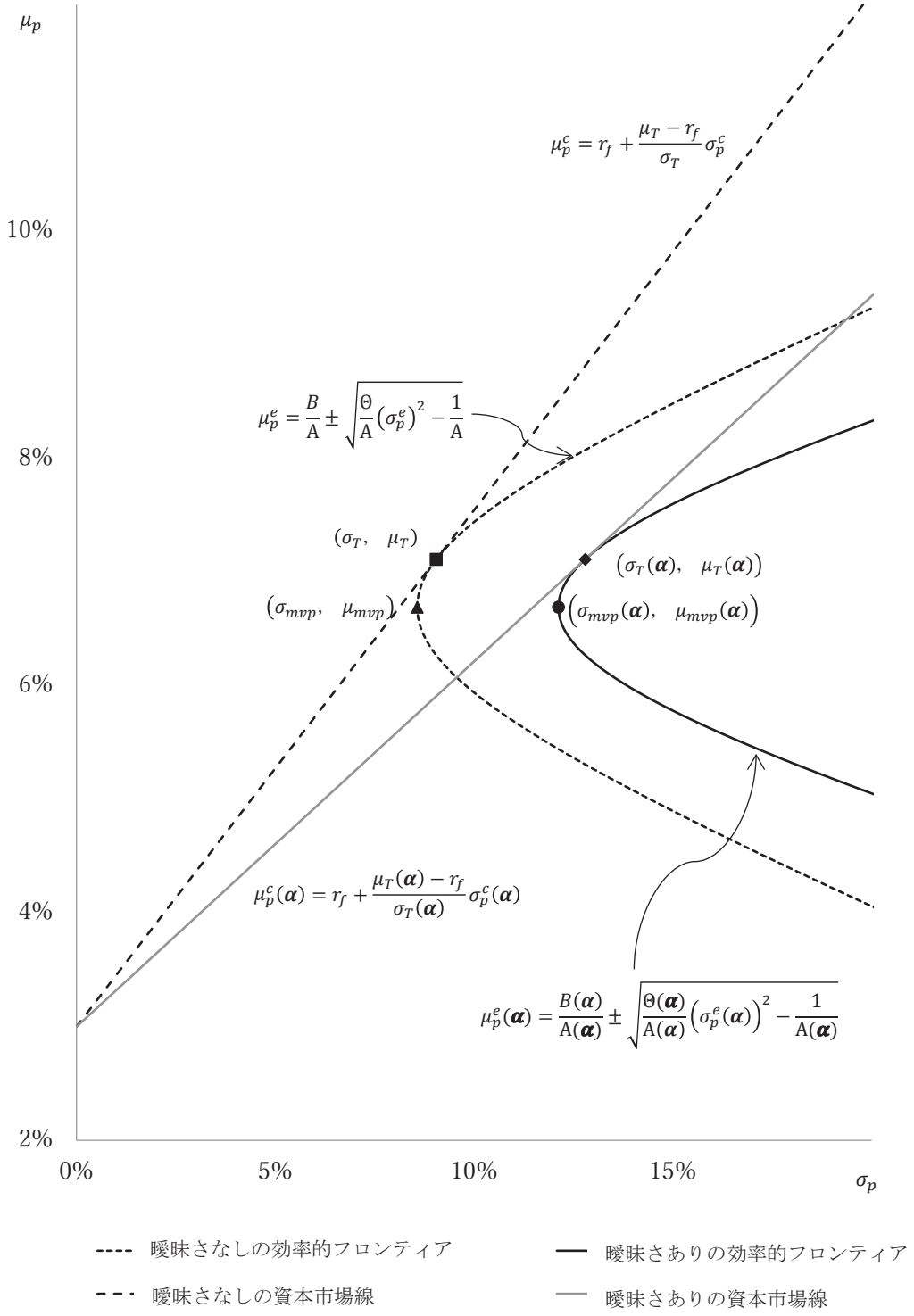


図1　効率的フロンティアとCML

$$\mu_i - r_f = \beta_i(\mu_M - r_f), \qquad \beta_i = \frac{Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M)}{Var(\tilde{r}_M)}. \tag{40}$$

ここでμ_Mは市場ポートフォリオの期待収益率を表す。一方、曖昧な経済における CAPM は(41)式である。

$$\mu_i(\boldsymbol{\alpha}) - r_f = \beta_i(\boldsymbol{\alpha})(\mu_M - r_f), \qquad \beta_i(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M{:}\,\boldsymbol{\alpha})}{Var(\tilde{r}_M{:}\,\boldsymbol{\alpha})}. \tag{41}$$

ここで$\mu_i(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済における第$i$危険資産の期待収益率、$Var(\tilde{r}_M{:}\,\boldsymbol{\alpha})$は市場ポートフォリオの収益率$\tilde{r}_M$の曖昧さ調整済み分散、$Cov(\tilde{r}_i, \tilde{r}_M{:}\,\boldsymbol{\alpha})$は第$i$危険資産の収益率$\tilde{r}_i$と$\tilde{r}_M$の曖昧さ調整済み共分散を表す。

また資産のシャープ比率を求めると、(42)式となる[10]。

$$S_p(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{\mu_p(\boldsymbol{\alpha}) - r_f}{\sqrt{\boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) \boldsymbol{w}(\boldsymbol{\alpha})}} \leq \frac{\mu_p - r_f}{\sqrt{\boldsymbol{w}^T \Sigma \boldsymbol{w}}} = S_p. \tag{42}$$

ここで$S_p(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済におけるシャープ比率、S_pは曖昧さのない経済におけるシャープ比率を表す。なお接点ポートフォリオでのシャープ比率は、(43)式である[11]。

$$S_T(\boldsymbol{\alpha}) = \sqrt{\left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \mathbf{1}\right)^T \Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1} \left(\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) - r_f \mathbf{1}\right)} \leq \sqrt{\left(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}\right)^T \Sigma^{-1} \left(\boldsymbol{\mu} - r_f \mathbf{1}\right)} = S_T. \tag{43}$$

ここで$S_T(\boldsymbol{\alpha})$は曖昧な経済における接点ポートフォリオでのシャープ比率、S_Tは曖昧さのない経済における接点ポートフォリオでのシャープ比率を表す。

5. 数値例

4 経済状態の 3 危険資産の収益率を(44)式とする。

$$\tilde{\boldsymbol{r}}_i = \begin{bmatrix} \tilde{r}_{11} & \tilde{r}_{12} & \tilde{r}_{13} & \tilde{r}_{14} \\ \tilde{r}_{21} & \tilde{r}_{22} & \tilde{r}_{23} & \tilde{r}_{24} \\ \tilde{r}_{31} & \tilde{r}_{32} & \tilde{r}_{33} & \tilde{r}_{34} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 16\% & 16\% & -4\% & -4\% \\ 28\% & -12\% & 28\% & -12\% \\ 40\% & -20\% & -20\% & 40\% \end{bmatrix}. \tag{44}$$

このとき曖昧さなしの経済における期待収益率は、$\mu^T = [6\% \quad 8\% \quad 10\%]$である。たとえば各$j = 1,2,3,4$について, 各危険資産の主観的確率を(45)式と想定する。

$$\begin{aligned} \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{1s}) &= \begin{bmatrix} 9/40 & 3/10 & 9/40 & 1/4 \\ 9/40 & 13/40 & 1/5 & 1/4 \\ 7/40 & 9/20 & 1/8 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{2s}) = \begin{bmatrix} 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \end{bmatrix}, \\ \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{3s}) &= \begin{bmatrix} 21/80 & 9/40 & 21/80 & 1/4 \\ 21/80 & 17/80 & 11/40 & 1/4 \\ 23/80 & 3/20 & 5/16 & 1/4 \end{bmatrix}, \quad \mathrm{P}_i(\tilde{r}_{4s}) = \begin{bmatrix} 11/40 & 1/5 & 11/40 & 1/4 \\ 11/40 & 7/40 & 3/10 & 1/4 \\ 13/40 & 1/20 & 3/8 & 1/4 \end{bmatrix}. \end{aligned} \tag{45}$$

このとき曖昧な経済における加重後の期待収益率は、$\mu^T = [6\% \quad 8\% \quad 10\%]$である。(1)式より、$m$ =3、$S = 4$の曖昧さの程度は(46)式となる。

$$\begin{aligned} \mho_1 &= \sqrt{\frac{49{,}458{,}021{,}471}{1{,}482{,}466{,}585{,}600}} \cong 0.182653, \quad \mho_2 = \sqrt{\frac{30{,}204{,}113}{100{,}066{,}494{,}528}} \cong 0.017374, \\ \mho_3 &= \sqrt{\frac{6{,}586{,}309{,}481}{2{,}964{,}933{,}171{,}200}} \cong 0.047132, \qquad \mho_4 = \sqrt{\frac{5{,}374{,}098{,}2701}{5{,}718{,}085{,}401{,}600}} \cong 0.096945. \end{aligned} \tag{46}$$

よって加重α_jは(2)式より(47)式となる。

$$\boldsymbol{\alpha}^T = \frac{1}{1{,}000{,}000} \begin{bmatrix} 57{,}894 \\ 608{,}663 \\ 224{,}364 \\ 109{,}078 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.057895 \\ 0.608663 \\ 0.224364 \\ 0.109078 \end{bmatrix}. \tag{47}$$

このとき危険資産間の集計重みに無差別であることから、$\omega_j = 1/3$ 、$(j = 1,2,3)$として状態確率は、(48)式である。

$$\boldsymbol{p}^{(j)} = \frac{1}{24} \begin{bmatrix} 5/24 & 43/120 & 11/60 & 1/4 \\ 1/4 & 1/4 & 1/4 & 1/4 \\ 13/48 & 47/240 & 17/60 & 1/4 \\ 7/24 & 17/120 & 19/60 & 1/4 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.2083 & 0.3583 & 0.1833 & 0.25 \\ 0.25 & 0.25 & 0.25 & 0.25 \\ 0.2708 & 0.1958 & 0.2563 & 0.25 \\ 0.2917 & 0.1417 & 0.2646 & 0.25 \end{bmatrix}. \tag{48}$$

危険資産の収益率の共分散は(49)式である[12]。

$$\Sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{1{,}000{,}000}\begin{bmatrix} 9{,}960 & 401 & 1{,}136 \\ 401 & 39{,}581 & -1{,}549 \\ 1{,}136 & -1{,}549 & 89{,}861 \end{bmatrix}$$
$$\cong \frac{1}{100}\begin{bmatrix} 9.906 & 0.506 & 0.955 \\ 0.506 & 3.9348 & -0.1109 \\ 0.955 & -0.1109 & 8.9253 \end{bmatrix}. \tag{49}$$

(18)式の効率的フロンティアは(50)式となる[13]。

$$\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha}) \cong 0.0668216151 \pm \sqrt{035945837\left(\sigma_p^e(\boldsymbol{\alpha})\right)^2 - 0.00750682539.} \tag{50}$$

このときの危険資産への投資割合は(51)式である[14]。

$$\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T \cong \begin{bmatrix} 2.555411 - 27.2111117\mu_p(\boldsymbol{\alpha}) \\ -0.773242 + 14.321331\mu_p(\boldsymbol{\alpha}) \\ -0.782169 + 12.889785\mu_p(\boldsymbol{\alpha}) \end{bmatrix}. \tag{51}$$

(38)式より、$y^c(\boldsymbol{\alpha})$は(52)式である。

$$y^c(\boldsymbol{\alpha}) = 22.6501102\left(\mu_p^c(\boldsymbol{\alpha}) - r_f\right). \tag{52}$$

最小分散ポートフォリオは(53)式である[15]。

$$\left(\sigma_{mvp}(\boldsymbol{\alpha}),\ \mu_{mvp}(\boldsymbol{\alpha})\right) \cong \left(0.007508682539,\ 0.0668216151\right). \tag{53}$$

$r_f = 3\%$とすると、CML は(36)式より(54)式となる[16]。

$$\mu_p^c(\boldsymbol{\alpha}) \cong 0.03 + 0.465359\sigma_p^c(\boldsymbol{\alpha}). \tag{54}$$

(37)式から接点ポートフォリオの投資割合は(55)式である[17]。

$$\boldsymbol{w}_T^c(\boldsymbol{\alpha}) \cong \begin{bmatrix} 0.538602 \\ 0.295047 \\ 0.16351 \end{bmatrix}. \tag{55}$$

(36)式から、接点ポートフォリオは(56)式である[18]。

$$\left(\sigma_T^c(\boldsymbol{\alpha}),\ \mu_T^c(\boldsymbol{\alpha})\right) \cong \left(0.094873,\ 0.074150\right). \tag{56}$$

6. おわりに

Markowitz（1952）のポートフォリオ選択理論に基づき、曖昧さの有無による理論を考察した。不確実性がリスクばかりでなく、曖昧さが存在することにより危険資産のみからなる（拡張版 Markowitz）効率的フロンティア（または CML）は、曖昧さのない（古典的 Markowitz）効率的フロンティア（または CML）の内側に入ることを証明した。またそのとき曖昧な経済における任意のポートフォリオの収益率のボラティリティの下での、ポートフォリオの期待収益率と各資産への投資割合を導出した。さらに曖昧さの有無によるシャープ比率と CAPM を求め、例を図示し、最後に数値例を示した。

注

[1] Sharpe（1964）、Lintner（1965）、Mossin（1966）を参照。

[2] Izhakian（2017）は、$\alpha_j = 1/m$とする。特に Izhakian（2017）は$m = 3$としている。

[3] $\mu(\tilde{r}) = \mathrm{P}_0(r_1) \times r_1 + \mathrm{P}_0(r_2) \times r_2 = 5\%.$

[4] $\sigma(\tilde{r}) = \sqrt{\mathrm{P}_0(r_1) \times (r_1 - E[\tilde{r}])^2 + \mathrm{P}_0(r_2) \times (r_2 - E[\tilde{r}])^2} = 15\%.$

[5] ケースの 2 の期待確率は、$\mathrm{E}[P(r_1)] = \frac{\mathrm{P}_1(r_1)+\mathrm{P}_2(r_1)+\mathrm{P}_3(r_1)}{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}_i(r_1)} = \mathrm{E}[\mathrm{P}(r_2)] = \frac{\mathrm{P}_1(r_2)+\mathrm{P}_2(r_2)+\mathrm{P}_3(r_2)}{\sum_{i=1}^{3}\mathrm{P}_i(r_2)} = 0.5.$

[6] $\mu(\tilde{r}) = \sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{P}_j(r_1)+\mathrm{P}_j(r_2)}{\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{P}_i(r_1)+\mathrm{P}_i(r_2))}\right)\{\mathrm{P}_j(r_1)\times r_1 + \mathrm{P}_j(r_2)\times r_2\} = 5\%.$

[7] $\mho = \sqrt{\sum_{j=1}^{3}\left(\frac{\mathrm{P}_j(r_1)+\mathrm{P}_j(r_2)}{\sum_{i=1}^{3}(\mathrm{P}_i(r_1)+\mathrm{P}_i(r_2))}\right)\left[\mathrm{P}_j(r_1)\times(r_1 - E[\tilde{r}_2])^2 + \mathrm{P}_j(r_2)\times(r_2 - E[\tilde{r}_2])^2\right]} = 15\%.$

[8] 古典的Markowtzモデルは、すべての記号において、曖昧さの変数 $\bullet(\boldsymbol{\alpha})$の$(\boldsymbol{\alpha})$を削除した変数である。

[9] $(11.a)$式より、

$$2\Sigma(\boldsymbol{\alpha})\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1^e\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\mathbf{1}.$$

上式の両辺に$\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}$を左から掛けると、

$$2\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha}) = \lambda_1^e\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{1}.$$

となる。よって、

$$\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha}) = \frac{1}{2}\{\lambda_1^e\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{1}\}.$$

となる。

つぎに上式に左側から$\mathbf{1}^T$を掛けると下式となる。

$$1 = \frac{1}{2}\{\lambda_1^e\mathbf{1}^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\mathbf{1}^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{1}\}.$$

したがって(13)式より

$$1 = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^e\boldsymbol{B}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\boldsymbol{A}(\boldsymbol{\alpha})\right).$$

となる。つぎに(9)式より

$$\mu_p^e(\boldsymbol{\alpha}) = \boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})^T\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}).$$

に(16)式の$\boldsymbol{w}^e(\boldsymbol{\alpha})$を代入すると、

$$\mu_p^e = \frac{1}{2}\{\lambda_1^e\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha})^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\boldsymbol{\mu}(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e\mathbf{1}^T\Sigma(\boldsymbol{\alpha})^{-1}\mathbf{1}\} = \frac{1}{2}\left(\lambda_1^e C(\boldsymbol{\alpha}) + \lambda_2^e A(\boldsymbol{\alpha})\right).$$

となる。

[10] 等号が成り立つ必要十分条件は下式が成立するときである。

$$\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \mu, \qquad \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \Sigma.$$

[11] 等号が成り立つ必要十分条件は下式が成立するときである。

$$\mu(\boldsymbol{\alpha}) = \mu, \qquad \Sigma(\boldsymbol{\alpha}) = \Sigma.$$

[12] 曖昧さのない経済の状態確率は、各危険資産の主観的確率を等ウェイトで統合した下式である。

$$p^T = \left(\frac{5}{24} \quad \frac{43}{120} \quad \frac{11}{60} \quad \frac{1}{4}\right).$$

各危険資産の期待収益率は下式である。

$$\mu_i = \sum_{s=1}^{4} p_s \tilde{r}_{is}.$$

上式より、

$$\mu^T = \left(\frac{11}{150} \quad \frac{11}{300} \quad \frac{3}{40}\right) \cong (0.0733333 \quad 0.0366667 \quad 0.075).$$

上式より、危険資産$\boldsymbol{i}$と$\boldsymbol{k}$の共分散は下式である。

$$\sigma_{ik} = \sum_{s=1}^{4} p_s(\tilde{r}_{is} - \mu_i)(\tilde{r}_{ks} - \mu_k).$$

よって、曖昧さのない経済における危険資産の収益率の共分散行列は、下式となる。

$$\Sigma = \begin{bmatrix} \frac{221}{22{,}500} & -\frac{49}{45{,}000} & -\frac{37}{6{,}000} \\ -\frac{49}{45{,}000} & \frac{3{,}431}{90{,}000} & \frac{83}{12{,}000} \\ -\frac{37}{6{,}000} & \frac{83}{12{,}000} & \frac{143}{1{,}600} \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.00982222 & -0.0010889 & -0.00616667 \\ -0.0010889 & 0.03812222 & 0.00691667 \\ -0.00616667 & 0.00691667 & 0.08937500 \end{bmatrix}.$$

[13] 曖昧さのない経済における効率的フロンティアは下式となる。

$$\mu_p^e = \frac{91{,}279}{1{,}353{,}895} \pm \sqrt{\frac{8{,}263}{270{,}779}\left(\sigma_p^e\right)^2 - \frac{8{,}514}{1{,}353{,}895}}$$

$$\cong 0.067420 \pm 0.0174687\sqrt{0.030516\left\{\left(\sigma_p^e\right)^2 - 0.006289\right\}}.$$

[14] 曖昧さのない経済における危険資産への投資割合は、下式である。

$$\boldsymbol{w}\left(\mu_p^e\right)^T = \left[\frac{6\left(28{,}495\mu_p^e - 921\right)}{8{,}263}, \quad -\frac{3\left(74{,}330\mu_p^e - 5{,}469\right)}{8{,}263}, \quad \frac{34\left(1{,}530\mu_p^e - 77\right)}{8{,}263}\right]$$

$$\cong [-0.668764 + 20.691032\mu_p^e \quad 1.985598 - 26.986567\mu_p^e \quad -0.316834 + 6.295534\mu_p^e].$$

である。

[15] 曖昧さのない経済における最小分散ポートフォリオは、下式となる。

$$\left(\sigma_{mvp},\ \mu_{,mvp}\right) = \left(\sqrt{\frac{8{,}514}{1{,}353{,}895}},\ \frac{91{,}279}{1{,}353{,}895}\right) \cong (0.0793002,\ 0.0674196).$$

[16] 曖昧さのない経済における CML は、下式である。

$$\mu_p^c = 0.03 + \sqrt{\frac{381{,}921}{1.540{,}000}}\sigma_p^c \cong 0.03 + 0.503169\sigma_p^c$$

[17] 曖昧さのない経済における接点ポートフォリオの投資割合は、下式である。

$$\boldsymbol{w}_T^c = \begin{bmatrix} 76{,}608/92{,}113 \\ 92{,}113/12{,}866 \\ 12{,}886/92{,}113 \end{bmatrix} \cong \begin{bmatrix} 0.83235 \\ 0.027781 \\ 0.138994 \end{bmatrix}.$$

[18] 曖昧さのない経済における接点ポートフォリオは、下式である。

$$(\sigma_T^c,\ \mu_T^c) = \left(\frac{303{,}346{,}854}{\sqrt{4242{,}023{,}845}},\ \frac{33{,}413}{460{,}505}\right) \cong (0.0845598,\ 0.0725478)$$

参考文献

中川裕司, 2026,「曖昧な経済における不確実性回避度と曖昧さプレミアムとの関係」, 岐阜協立大学『岐阜協立大学論集』, 59(2), pp. 47-70.

Brenner M. and Y., Izhakian, 2018, “Asset Pricing and Ambiguity: Empirical Evidence”, *Journal of Financil Economics,* 130, pp. 503-531。

Fu R., B. Melenberg, and N. Schweizer, 2023, ”Comment on ,” A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement” [J. Econ. Theory 187 (2020) 105001],” *Journal of Economic Theory*, 207, pp. 1-22.

Izhakian, Y., 2017, ”Expected Utility with Uncertain Probability Theory,” *Journal of Mathematical Economics*, 69(1), pp. 91-103.

Izhakian, Y., 2020, ”A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement,” *Journal of Economic Theory*, 187, 105001.

Izhakian, Y., 2024, ”A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement: A Reply,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4828038.

Knight, F. H., 1921, *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston, Houghton Miffin, Revised Hutson Street Press (2025/5/22), ISBN-10 : 1025141644, ISBN-13 : 978-1025141640.

Lintner. J., 1965, “The Valuarion of Risky Assets and the Selection of Risky Investments in Stock Portfolios and Capital Budgets,” *Review of Economics and Statics*, 47(1), pp13-37.

Markowitz, H., 1952,” Portfolio Selection,” *Journal of Finance*, (7)1, pp. 77-91.

Mossin. J., 1966, “Equilibrium in a Capital Asset Market,” *Econometrica*, 34(4), pp768-783.

Sharpe, W. F., 1966, “Mutual fund performance,” *Journal of Business*, 39, pp. 119-138.

Wakker, P. P., 2010, “Prospect Theory: For Risk and Ambiguity. Cambridge University,” Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511779329.

Wakker, P. P., 2023, “Further Comments and Elucidations for Wakker (2010) “Prospect Theory: For Risk and Ambiguity,” https://personal.eur.nl/wakker/ptbook/additions/pt_further_comments.pdf.