岐阜協立大学論集 59 巻 2 号（2026 年）
The Journal of Gifu Kyoritsu University, Vol.59, No.2（2026）

曖昧な経済における不確実性回避度と曖昧さプレミアムとの関係

中川　裕司（岐阜協立大学経営学部）

キーワード：HARA 型効用関数，曖昧さ(性)，不確実性，プレミアム，回避度

１．はじめに

「人が“合理的”であるモデルを使って金融市場を理解しようとする。合理的とは，二つのことを意味している。第一に，人が新しい情報を受け取る際には，彼らは，Bayes の法則とよばれる方法に則り，正しく信念を更新し，第二に，与えられた信念の下で，人はSavage の主観的期待効用（SEU:Subjective Expected Utility）の概念と整合的であるような規範的に受け入れることができる選択をする。（中略）合理性というファイナンスの基礎になっている二つの教義のうち一つ，あるいは両方を緩和すると何が起こるかということを分析するものである。いくつかの行動ファイナンスモデルにおいては，人は信念を正しく更新することができない。これは，たいていは，Bayes の法則を適切に適用できないことから生じる。別のモデルでは，人は正しい信念をもつが，規範的に疑わしい選択をする。それは，SEU とは矛盾するものである」[1]。

ヒストリカル・ボラティリティ，不均一分散（ARCH・GARCH）モデル[2]で計測されるなどのボラティリティ指標や VIX 指数は，リスクであり，結果が先験的に未知であるが，すべての可能な結果の確率は，完全に分かっている状態である。しかし現実には，経済や金融市場の将来起こるべき事象は，状態も確率も未知であり不確実性に直面する。にもかかわらず，この不確実性は，しばしば無視されてきた。「曖昧さ」とは，結果が先験的に未知であるばかりでなく，すべての可能な結果の確率もわからない状態をいう。曖昧さとは，より具体的にはリスクの尺度を構成する確率に関する不確実性と解釈するという考えがあり，曖昧さの尺度のひとつの解釈は，確率のボラティリティで測定しようとする指標の考えである。リスクとともに曖昧さを導入することで，経済における曖昧性をより明確に把握することができる。先行研究でのリスクと曖昧さの相違を説明するために，次の例を挙げる。

> 「投資家は，表（50%）と裏（50%）の確率を知っている，釣り合いの取れたコインの表裏でペイオフが決まる賭けを考えてみる。結果は，不明なので，賭けにはリスクがあるが，確率がわかっているので曖昧さはない。しかしコインのバランスが取られていない場合，表と裏の確率はもはや確実ではない。投資家は，リスク（確率が未知）だけではなく，曖昧さにも直面する。」

本節では，近年の不確実性に関するサーベイの先行研究を紹介する。Chai and Liu（2021）は，記述的行動と規範的行動の両方で古典的意思決定理論と実際の個人の意思決定との関係を再検討する文献の批判的研究を行っている。特に，彼らは不確実性下での意思決定における曖昧さ回避モデルに注意を払っている。Gilboa（2025）は，不確実性下における選好をモデル化する際に，経済学者が提起する疑問，たとえば理論に関する疑問，理論と証拠の矛盾と実証結果に関する疑問などを浮き彫りにしている。最近の意思決定分析を論じる Shi（2025）は，PT（プロスペクト理論）などの行動ファイナンスの基礎理論が，資産価格設定に与える影響の概要を提供している。また Ilut and Schneider（2022）は，曖昧さを用いた期待効用（EU：Expected Utility）による最近のマクロ経済学と金融を概観している。

次節では，不確実性の概念の先行研究を紹介し，PT と累積プロスペクト理論（CPT：Cumulative Prospect Theory）の考え方と実証分析を紹介する。3 節では，リスクと曖昧さの概念を紹介して，それらを含む不確実性の概念から Klibanoff, Marinacci and Mukerji（2005 KMM）の「滑らかな曖昧性モデル（以下，KMM モデルという。）」[3]を考察する。4 節では，Izhakian and Binninga（2011）の不確実性プレミアムを求め，5 節では，HARA 型効用関数と絶対的・相対的リスク回避度を復習し，6 節では曖昧さ関数と絶対的・相対的曖昧さ回避度を考察する。7 節ではそれぞれの関数下で，曖昧さプレミアムを議論する。

2. 不確実性概念の潮流

期待値という概念は，17 世紀半ばに Pascal と Fermat と Huygens の間で生まれ，1738 年に Betnoulli[4]が提唱した期待効用への道を開いた。その後今日に至るまで，EU 最大化が著名な理論となった。しかし曖昧性下での意思決定モデルを探求した Knight（1921）は，Bayes アプローチに反対し，1940 年代になって，von Neumann-Morgenstern（vNM）は主観的期待効用理論（SEUT：SEU Theory）の公理的基礎を規範的基準として明確に確立し，同年 Edwards（1954）は，客観的効用とは異なる SEUT を記述目的で一般化した。Savage（1954）は，vNM の考えに基づいて，意思決定者が SEU の最大化に従って行動する場合にのみ，確実性原則が満たされることを明示した。他方しばらくの間，Markowitz（1952）による慣例的な富の概念，Allais（1953）によるパラドクスなどを含む心理的確率に関する研究が，経済学ではほとんど無視されてきた[5]。1960 年代にかけて，SEUT は，経済主体が肯定的または規範的な目的のために，既知または未知の確率による意思決定問題を扱うための支配的なアプローチとなった。そうしたなか Ellsberg（1961）は，Savage（1954）の理論に挑戦するように，SEUT に対する心理実験を提案した。Ellsberg（1961）の実験は次のようなものである。

> 「それぞれ 100 個のボールが入った 2 つの袋を前にしたとする。一方には，赤と黒のそれぞれ 50 個の入った既知の袋，もう一方には，赤と黒のボールが入っていることは分かっているが，色の数については何もわかっていない未知の袋を考える。2 つの袋のうち指定した袋から，ボールをランダムに選んで，宣言した色と選んだ色が一致していれば賞金が獲得でき，そうでなければ何も獲得できないとする。」

このとき既知の袋からボールを選んだ場合でも，未知の袋からボールを選んだ場合でも，赤のボールに賭けるか，黒のボールに賭けるかには無差別であるとする。Ellsberg は，既知の袋と未知の袋のどちらに賭けるかについても無差別であるかどうかという実験を考察した。以下，岩井克俊（2019）を参考にして説明を行う。

ケース 1：A：既知の袋の赤に賭ける B：既知の袋の黒に賭ける
ケース 2：C：未知の袋の赤に賭ける D：未知の袋の黒に賭ける
ケース 3：E：既知の袋の赤に賭ける F：未知の袋の赤に賭ける
ケース 4：G：既知の袋の黒に賭ける H：未知の袋の黒に賭ける

思考実験の結果，ケース 1 では A と B が無差別，ケース 2 では C と D が無差別となるが，ケース 3 では E が F より好まれ，ケース 4 では G が H より好まれる傾向がある。未知の袋において，赤のボールが出る主観的確率をpとすると，既知の袋では客観的確率が与えられているから，ケース 3 の結果を説明するには，$p < 0.5$でなければならない。しかしその場合はケース 4 では，黒のボールが出る確率が 0.5 よりも大きいと考えることになり，未知の袋の H に賭けなくてはならないが，これは思考実験結果と矛盾する。すなわちこの実験結果では，期待効用は表現できない。未知の袋において，赤のボールの出る客観的確率が与えられておらず，曖昧さを表している。したがって意思決定者は，曖昧さを好まない傾向（曖昧さ回避）があ

ることを示唆し[6]，Ellsberg（1961）は，意思決定者が感じる曖昧性が意思決定と無関係ではないということを示した。Anscombe and Aumann（1963）は，客観的確率を所与として，不確実性下での選択から主観的確率を導出するモデルにおいて，概念的にEllsberg（1961）と類似した結果を提供した。その後変化をもたらしたのは，Kahneman and Tversky（1979）によるPTである。近年になってCrockett, Izhakian and Jamison（2019）は，Ellsberg（1961）の3色1袋フレームが，2色2袋フレームとは全く異なる選好を誘発することを明らかにした。Ellsbergのパラドックスは次で説明される。

「袋に90個のボールが入っている。そのうち30個は黒のボールである。残りの60個は赤か白のボールであるが，それぞれ何個かわからない。この袋からボールを取り出すとき，次のどちらのケースを選択するか？

ケース1：赤のボールが出たら¥1,000もらえる。

ケース2：黒のボールが出たら¥1,000もらえる。

また次のケースではどちらを選択するのか？

ケース3：赤か白のボールが出たら¥1,000もらえる。

ケース4：黒か白のボールが出たら¥1,000もらえる。」

まずケース1とケース2では，ケース1を選ぶ人が多いということが知られている。さらにケース3とケース4では，ケース4を多くの人が選ぶことが知られている。EllsbergのパラドックスはEUTの独立性を満たさない例である。

2.　プロスペクト理論と累積プロスペクト理論

行動ファイナンスにおける選好のひとつはPTであり，もうひとつは曖昧さ回避に依拠する。

個人が投資問題を考える場合，利益を獲得できる状況では，リスク（損失可能性（loss aversion））を回避するように行動をし，すでに損失を被っている状況では，損失を取り戻そうとするリスク追求的な（ハイリスク）行動をするというPTが，Kahneman and Tversky（1979）により展開され，Tversky and Kahneman（1981）とともに，不確実性下の意思決定問題としての効用理論の考え方と矛盾する代替モデルを発案した。PTには損失回避，処分効果（気質効果，disposition effect），感応度逓減などの考え方があり[7]，意思決定問題に参照点（reference point）[8]を追加し，問題の利得や損失に価値関数を適用する。その理論のもとで価値関数は，利得の場合は凹型，損失の場合は凸型であり，一般に利得よりも損失の方が急勾配になる反射効果（reflection effect）を主張する。Kothiyal, Spinu and Wakker（2011）は，PTの選好基礎を一般化し，Bailon, Driesenb and Wakker（2012）は，効用の公理化において参照点を導出する方法を提案した。

これまで，金融的事象をPTで説明しようとするさまざまな実証分析が存在した。Abdellaoui, Bleichrodt and Paraschiv（2007）は，利益と損失の効用を同時に引き出す手法を提案し，実験研究でPTの効用関数のパラメータをはじめて得た。その後，Imai, Nunnari, Wu and Vieider（2025）は，69カ国約52,000人の被験者の812件の推定値を報告した166件の論文のデータを統合し，PTのパラメータ推定値の包括的な分析を行った。Barberis and Xiong（2009）は，PTにおける選好が処分効果のうち，損失に関して予測できるかどうかを検証した。さらにLi and Yang（2013）は，一般均衡モデルを構築し，PTが処分効果，資産価格，取引量に及ぼす影響を調査している。Barberus, Mukherjee and Wang（2016）は，投資家が過去の株式収益率の分布をPTで記述する方法で評価できるかという仮説を検証している。Doszyń（2018）は，PTの中で価値関数をリスク傾向に使用され，リスク傾向の測定方法を提案している。この方法は，2つ以上の出力（安全な出力と危険な出力）があるCPTの場合に使用できると述べている。

PT の展開後，Tversky and Kahneman（1992）は，利得と損失にたいする S 字型の確率加重関数（人の主観的な確率認識を表した関数）[9]を使用し，理論を拡張する新しいバージョンの PT，すなわち CPT を展開した。Wakker and Tversky（1993）は，EUT や CPT を含む，不確実性下における意思決定のためのさまざまなモデルを公理化する手法を提示し，Uzhga-Rebrov and Grabusts（2021）は，それらの性質を分析した。Ingersoll（2014）は，CPT を使って完全な市場だけでは，市場ポートフォリオが効率的であり，標準的な代表者分析が有効であることを保証するには十分ではないことを示した。また Shi，Gui，Yao and Li（2015）は，参照点適応プロセスを，人々が以前の利益と損失を認識する方法に関連付けることによって形式化し，参照点と損失回避を備えた動的取引モデルを展開し，その半分析的解を導き出している。Francis（2021）[10]は，Kahneman and Tversky（1979）の PT を再定式化して，既存の多くの経済，金融，心理学，意思決定理論を互換性のある vNM 理論に適用している。Cinfrignini，Petturiri and Vantaggi（2024）は，CPT での非配当危険株と無危険資産で構成される資産価格の二項分布モデルにおける動的ポートフォリオ選択問題を検討している。Oprea（2024）は，確率のない状況で見かけ上の確率加重を考慮し，損失の余地のない状況で損失回避が考慮されることを示した。これらの知見は，リスクに関する行動の多くが，真のリスク選好ではなく，複雑性に起因するミスに由来することを示唆し，Wakker（2025）は追論している。池田新介，岡田克彦，（2025 第 4 章）は PT と CPT の理論的な解説を行い，第 5 章では，数値例を使って説明している。

CPT の実証分析の例として，Srivastava，Aggarwal and Mehra（2022）は，CPT のリスク基準に基づき，内部(リスク管理部門によって課される)と外部(認定規制機関)の 2 種類のリスクに直面するポートフォリオ選択問題で効率的フロンティアを生成した。また Srivastava，Aggarwal and Bansai（2024）は，データ包絡分析を統合した CPT に基づくポートフォリオ選択アプローチを提案した[11]。

3. リスクと曖昧さの不確実性

PT と CPT が，リスク下の選択をどの程度正確に記述するかについては，コンセンサスが得られていなかったようであり，同じ金額でも，それが利益として認識されるか損失として認識されるかによって，不確実性下で異なる意思決定を引き起こすかもしれない問題が生じている。EUT は，PT あるいは CPT に対処し，意思決定に影響を与える参照点の合理化の可能性を模索している。

Schmeidler（1989）は，主観的確率が人の賭ける意思を反映するものであれば，それは非加法的な振る舞いをする可能性があると論じる。すなわち 2 つの不連続な事象の和の確率とは異なる可能性があることを言及し，不確実性の表現を意思決定理論に関連付け，公理的導出を行った。非加法的集合関数は，Choquet（1953-54）により容量（capacities）と呼ばれ，容量に関する積分を定義し，Elleberg（1961）は，Choquet 期待効用（CEU：Choquet Expected Utility）を公理化し，Schmeidler（1989）は，Anscombe and Aumann（1963）のモデルを一般化し，Choquet 積分に置き換えた。その際，Schmeidler モデルにおける容量が，規則的で加法的な確率の関数である場合，Choquet 積分は，与えられた確率にたいするランクに依存する依存型効用関数（RDU：Rank-Dependent Utility）と等価であるが，RDE との類似性は，極めて特殊ケースであると述べ，Wakker（2010，2023）が支持している。CEU は，曖昧性下での意思決定に関する他の多くのモデルへの道を開いた画期的なモデルであった。

この種のモデルで最も広く使用されているのは，KMM が公理化した行為にたいするモデルである。この KMM モデルの重要な特徴は，意思決定者の嗜好の特性である曖昧さへの態度と，意思決定者の知覚の特性として識別される曖昧性を分離することであり，意思決定者は，自然の状態に関する単一の一意的な確率分布ではなく，「確率分布の集合を持つ」と仮定する。

KMMモデルは，意思決定の信念が2つの階層からなると考える。$\tilde{c}$を確率的消費水準として，意思決定者の選好$V(\tilde{c})$は，Savage（1987）をヒントに，下式の二重期待値の形をとる。

$$V(\tilde{c}) = \int_{\mathbb{P}} \phi\left(\int_{\mathbb{S}} u(\tilde{c})d\pi\right)d\psi = E_{\Psi}[\phi(E_{\Pi}[u(\tilde{c})])]. \tag{1}$$

ここで確率分布の集合$\mathbb{P} = \{\Pi_1 = (\pi_{1,1}, \cdots, \pi_{S,1}), \cdots, \Pi_K = (\pi_{1,K}, \cdots, \pi_{S,K})\}$は，状態空間上の可能性のある確率分布の閉じた凸型集合を表す。各$\Pi_k = (\pi_{1,k}, \cdots, \pi_{S,k})$，$(k = 1,2, \cdots, K)$は，$\mathbb{S} = \{1, \cdots, S\}$上の確率測度を表す。KMMモデルは，意思決定者が2つの階層として構築されることを想定している。すなわち可能性のある確率分布の主観的集合$\mathbb{P}$と$\mathbb{P}$上の主観的事前空間集合（意思決定者の主観的信念）$\Psi = (\psi_1, \cdots, \psi_K)$である。$\mathrm{E}_{\Pi}[\cdot]$は，確率分布の集合$\mathbb{P}$うちの1つの確率分布$\Pi$を条件とする期待演算子，$\mathrm{E}_{\Psi}[\cdot]$は，主観的事前空間集合$\Psi$による主観的期待演算子を表す。vNM効用関数が$u'(\cdot) > 0$および$u''(\cdot) < 0$で凹型関数であると仮定することと同様に，曖昧さ関数ϕは$\phi'(u(\bar{c})) > 0$，$\phi''(u(\bar{c})) < 0$で凹型関数であると仮定する[12]。

意思決定者の主観的信念は，Bayesの事前分布である非線形関数を導入するため，結果として得られる振る舞いは，この事前分布に関してSEUTと等価ではない。すなわちリスクにたいする態度は，vNM型効用関数の形状によって特徴付けられるが，曖昧性にたいする態度は，期待効用に適用する変換形状によって特徴付けられることを示す。Maccheroni，Marinacci and Ruffino（2013）は，Arrow-Pratt係数と類似したKMMモデル下での確実性等価係数を分析している。この曖昧性の特徴付けは，Epstein and Zhang（2001）[13]とGhirardato and Marinacci（2002）[14]が提唱する主観的曖昧性の定義と関連する。変換の一種である曖昧性に関する負の指数型曖昧さ関数である一定の絶対的曖昧さ回避度（CAAA：Constant Absolute Ambiguity Aversion）が，行動学的証拠と一致し，定常的な曖昧さ回避の特殊ケースであることをBallon and Placido（2019）は示す。Seo（2009）は2次的信念（second-order beliefs）あるいは確率測度における信念（beliefs over probability measures）によって，Anscombe and Aumann（1963）の公理を弱め，曖昧さ回避の必要条件を示した。さらにDenti and Pamatto（2022）は，Anscombe-Aumann行為[15]よりも優先されるKMMの公理的基礎を与えている。

Epstein（2010）は，KMMモデルが，曖昧さと曖昧さへの態度を分離するという主張への問題提起をしている一方，Wakker（2010, 2023）は，曖昧さの度合いが確率の分散で測定できることを示している。Izhakian and Benniga（2011）は，KMMモデルに基づいてPratt（1964）のリスクプレミアムを不確実性プレミアム（リスクプレミアムと曖昧さプレミアム）に一般化し，Baillon，Driesen and Wakker（2012）は，確率が未知の場合，異なる凹型関数を比較するための手法のひとつとして，KMMを一般化して，リスクと曖昧さにたいする態度をモデル化して分析している。経済モデルとして，Schmeidler（2011）は，安全資産と1種類の危険資産からなるポートフォリオを用いて，KMMモデルの比較静学を行い，Park and Wong（2022）はリスク回避かつ曖昧さ回避型の投資家が，危険資産の収益の曖昧性下の消費投資問題を考察している。またChen，Vanduffel and Wilke（2025）は，投資家が正の指数の曖昧さ回避関数を持つ1期間のKMMモデル下で，期待効用関数を最大化する最適行動を求めている。

KMMモデルの実証面からのアプローチもいくつか提示されている。Hara，Mukerji，Riedel and Tallon（2022）は，交換経済における効率的な配分にたいする曖昧さの影響をKMMモデルの中で検証している。Iwai and Yoshikawa（2025）は，二項分布の株価変動モデルをPTと処分効果から論じたBarberis and Xiong（2009）モデルを拡張して，さまざまな効用関数と加重価値関数のパラメータの推定を行った。その際，Izhakian（2017）が提唱する不確実性期待効用（EUUP：Expected Utility Uncertain Probability）に基づき，投資家が動的計画法によって損益のEUUP最大化モデルの中で，曖昧な態度を組み入れて処分効果を説明している。

KMM モデルは，意思決定者を特徴付ける信念と選好を区別し，リスクにたいする態度と曖昧さにたいする態度に区別し，このように分けることで，各要因の効果を精緻化し，不確実性プレミアムへの影響を研究することができる特徴を有する。

4.　不確実性プレミアム

Izhakian and Binninga（2011）は，(1)式の KMM に基づき，Pratt（1964）のリスクプレミアムを不確実性プレミアムに一般化した。確実性プレミアムは，リスクプレミアムと曖昧さプレミアムを累積するプレミアムである。リスクプレミアムとは，実現される事象が事前に未知であるが，起こりうるすべての事象にたいする正確な確率が既知であるという状況によるリスクのある賭けを，その期待される結果に置き換えるために支払ってもよいと，意思決定者が考える実現する結果のわからないことから生じるプレミアムである。一方，曖昧さプレミアムとは，意思決定者が期待効用の分散を避けるために支払ってもよいと考えるプレミアムであり，実現する事象には未知であるだけでなく，事象の確率も一意でないか，未知である状況から生じるプレミアムであると，彼らは考える。

まず周知の Pratt (1964) のリスクプレミアムを確認しておく。確定的な消費水準$\bar{c}_p$を所与として，$\rho(\bar{c}_p)$を$u\big(\bar{c}_p-\rho(\bar{c}_p)\big)=\mathrm{E}[u(\tilde{c})]$ $(\tilde{c}>0)$と定義すると，次式のようになる[16]。

$$\rho(\bar{c}_p)\approx-\frac{1}{2}\frac{u''\big(\bar{c}_p\big)}{u''\big(\bar{c}_p\big)}\sigma^2\geq 0.$$

ここで$\bar{c}_p(=\mathrm{E}[\tilde{c}])$は期待消費水準値，$\sigma^2$は消費水準の分散であり，$u(\cdot)$は厳密に正で，2 回微分可能で凹型の vNM 効用関数，$-u''(\bar{c}_p)/u'(\bar{c}_p)$は絶対的リスク回避度を表す。

$\rho(\bar{c}_p)$を一般化して，Izhakian and Binninga (2011) は，リスクプレミアムと曖昧さプレミアムからなる「不確実性プレミアム（uncertainty premium)」$\delta(\bar{c})$を次式のように定義する[17]。

$$v(\bar{c}-\delta)=\phi\big(u(\tilde{c}-\delta)\big)=\mathrm{E}_\Psi[\phi(\mathrm{E}_\Pi[u(\tilde{c})])].$$

ここで$\bar{c}=\mathrm{E}_\Psi[c_\Pi]=\mathrm{E}_\Psi[\mathrm{E}_\Pi[\tilde{c}]]$を表し，確率分布$\Pi$上の期待効用値$E_\Pi[u(\tilde{c})]$群と等しい主観的信念（主観的事前空間状態集合$\Psi$）で測ったある確定的消費水準（確実性等価消費水準と呼ぶ）を表す。$v=\phi\circ u$である[18]。そこでは Izhakian and Binninga (2011) の定理 1 より，Pratt (1964) の$\rho(\bar{c}_p)$とは異なるリスクプレミアムを$\rho(\bar{c})$と曖昧さプレミアムを$\xi(\bar{c})$で表すと，$\delta(\bar{c})$はリスクと曖昧さの独立性より，$\rho(\bar{c})$と$\xi(\bar{c})$は線形となり，(2)式となる。導出は，Izhakian and Binninga (2011) を参考に Appendix A で示す。

$$\delta(\bar{c})\approx\rho(\bar{c})+\xi(\bar{c}). \tag{2}$$

リスクプレミアム$\rho(\bar{c})$を求めると (3)式となる。

$$\rho(\bar{c})=E_\Psi[\rho_\Pi]=-\frac{1}{2}\frac{u''(\bar{c})}{u'(\bar{c})}\hat{\sigma}^2=\frac{A_R(\bar{c})}{2}\hat{\sigma}^2=\frac{R_R(\bar{c})}{2\bar{c}}\hat{\sigma}^2 \tag{3}$$

ここで$\rho(\bar{c})$は，条件付きリスクプレミアムρ_Πを意思決定者の主観的信念で測った期待値$E_\Psi[\rho_\Pi]$であり，c_Πは，$u(c)=E_\Pi[u(\tilde{c})]$となる確率的消費水準$\tilde{c}$の期待効用値である (以下，$E_\Pi[\cdot]$を「条件付き」と表現する)。すなわち意思決定者の主観的事前空間集合Ψ（意思決定者の主観的信念群）のうちのひとつの空間状態からなる各確率分布Π（意思決定者の主観的信念のひとつ）によって測られる。このとき不確実性はあるが，曖昧性がない場合，単一の状態空間の事前分布からなる Pratt (1964) のリスクプレミアムの表現となる。すなわち$\hat{\rho}(\bar{c})=\rho(\bar{c}_p)(\geq 0)$である。$\hat{\sigma}^2=\mathrm{E}_\Psi[\sigma_\Pi^2]$を表し，確率分布$\Pi$を条件とした消費水準の分散を表し，条件付き消費水準の分散群の期待値$\mathrm{E}_\Psi[\sigma_\Pi^2]$を表す。

絶対的リスク回避度$A_R(\bar{c})$と相対的リスク回避度$R_R(\bar{c})$は次式で定義される[19]。

$$A_R(\bar{c}) \equiv -\frac{u''(\bar{c})}{u'(\bar{c})} > 0, \qquad R_R(\bar{c}) \equiv -\frac{u''(\bar{c})}{u'(\bar{c})}\bar{c} = A_R(\bar{c})\bar{c} > 0. \tag{4}$$

絶対的曖昧さ回避度$A_A(\bar{c})$と相対的曖昧さ回避度$R_A(\bar{c})$を(5)式で定義する。

$$A_A\big(u(\bar{c})\big) \equiv -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)} > 0, \quad R_A\big(u(\bar{c})\big) \equiv -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u(\bar{c}) = A_A\big(u(\bar{c})\big)u(\bar{c}) > 0. \tag{5}$$

曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$を求めると(6)式となる。

$$\xi(\bar{c}) = -\frac{1}{2}\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})}\breve{\sigma}^2 = -\frac{1}{2}\left(\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u'(\bar{c}) + \frac{u''}{u'}\right)\mathrm{Var}_\Psi[CE_\Pi]$$
$$= \frac{1}{2}\Big(A_A\big(u(\bar{c})\big)u' + A_R(\bar{c})\Big)\mathrm{Var}_\Psi\left[c_\Pi - \frac{1}{2}\frac{u''}{u'}\sigma_\Pi^2\right]. \tag{6}$$

ここで主観的曖昧性評価関数$Y(x)$を次のように定義する。

$$Y(x) \equiv \mathrm{Var}_\Psi\left[c_\Pi + \frac{x}{2}\sigma_\Pi^2\right] = \mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi] - \mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2]x + \frac{1}{4}\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]x^2. \tag{7}$$

ここで$x = A_R(\bar{c})$または$R_R(\bar{c})/\bar{c}$である。$Y(x)$は放物線形状である。$A_R(\bar{c}) > 0$かつ$Y\big(A_R(\bar{c})\big) > 0$となる条件は$\big(\mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2]\big)^2 < \mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]$である。$\mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]$は基準的な曖昧コスト，$\mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2]$はリスク回避が強いほど，プレミアムが減少する調整効果を表し，$\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]$はリスク回避の２次的な増幅効果を表す。$\xi(\bar{c})(\geq 0)$は，意思決定者のリスク回避度と曖昧さ回避度$-v''(\bar{c})/v'(\bar{c})$と条件付き確実性等価消費水準$c_\Pi$と消費水準の条件付き分散$\sigma_\Pi^2$から影響を受ける確実性等価分散（variance of certain equivalent）$\breve{\sigma}^2$によって決定され，意思決定者の主観的な曖昧さの度合いを測る尺度，すなわち意思決定者の２次信念を使って計算される[20]。言い換えれば，消費が変わると，効用が変わり，曖昧さとリスクに対する反応が変化し，その結果「曖昧さを避けるために支払ってもよい保険料」$\xi(\bar{c})$が決まる。$CE_\Pi(= c_\Pi - \rho_\Pi)$は，確率分布$\Pi$を条件とした条件付き確実性等価消費水準（確定値）を表す。${\sigma_\Pi}^2$は，消費水準$\tilde{c}$のひとつの空間状態からなる確率分布Πによって測られる条件付き分散$\mathrm{Var}_\Pi[\tilde{c}]$を表す。$\breve{\sigma}^2$は特徴付ける以下の３つの属性を通じて，$\xi$に影響を与える。すなわち(i）条件付き確実性等価消費水準c_Πの条件付き分散σ_Π^2，（ii）条件付き確実性等価消費水準c_Πと条件付き確実性等価消費水準の条件付き分散σ_Π^2の共分散$\mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2]$，（iii）条件付き確実性等価消費水準の条件付き分散群の主観的事前状態空間集合を条件とした分散群$\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]$である。

$\rho(\bar{c})$の増加は，条件付き期待効用$\mathrm{E}_\Pi[u(\tilde{c})]$の状態空間集合$\Psi$を設定し，それに対応する確実性等価の集合$CE_\Pi$のスプレッド$(\bar{c} - \delta)$が小さくなる，つまり$\delta$が小さくなるが，確実性等価分散$\breve{\sigma}^2$が小さくなるため，意思決定者は，より低い曖昧さプレミアムξを支払うことを望む。他方，$\breve{\sigma}^2$の増加は，曖昧さが増大し，より高い曖昧さプレミアムξを支払うことを望むことになる。

ξがゼロに近づく極端なケースは，３つ存在する。まずひとつは，意思決定者がすべての自然状態の正確な確率を知っている場合であり，主観的事前空間分布の集合Ψが，単一の確率測度からなる。この場合，$\mathrm{Var}_\Psi[CE_\Pi] = 0$となり，$\xi$はゼロとなる。つぎに意思決定者が曖昧さに中立的（$A_A''(\bar{c}) = 0$）であれば，曖昧さの程度とは，無関係に意思決定者が支払うことを望むξは，ゼロに等しい。最後に，意思決定者のリスク回避度が無限大$(A_R(\bar{c}), R_R(\bar{c}) \to \infty)$に近づくと，確実性等価分散$\breve{\sigma}^2$がゼロに近づき，曖昧さがない場合に対応し，$\xi$はゼロとなる。

Izhakian and Binninga（2011）は，ξと$\hat{\rho}$が無相関であると仮定することが自然であると考える。ある閾値よりも曖昧さ回避度が高い場合，意思決定者のリスク回避度が高まると，ξは常に減少する可能性がある。

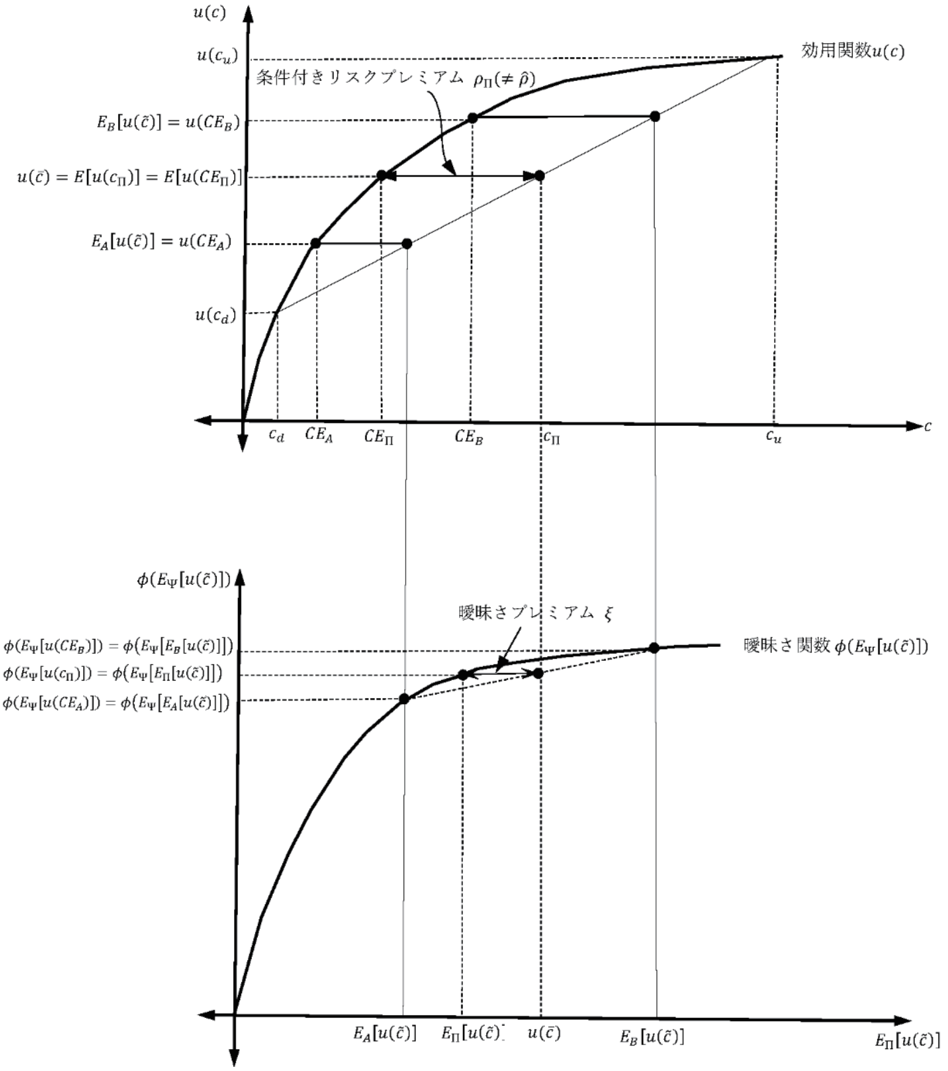

図１　効用関数 $u(\tilde{c})$と曖昧さ関数 $\phi(E_\Psi[u(\tilde{c})])$

Izhakian and Benniga（2011）図２を修正

しかしもしξと$\hat{\rho}$の相関がゼロでないとすると，ξは$\hat{\rho}$とは負の相関をするとも考えられる。仮に正の相関がある場合，すなわち$\mathrm{Cov}_\Psi[\hat{\rho}(\tilde{c}), \xi(\tilde{c})] > 0$の場合，より高い条件付き確実性等価期待消費水準$c_\Pi$をより高い確実性等価消費水準の条件付き期待分散$\sigma_\Pi^2$を補い，このことが曖昧さの程度を減少させるという矛盾を生じさせることになる。

図１の上図の横軸は，消費水準cを表し，経済が好況のときの消費水準をc_u，不況のときの消費水準をc_dを表し，縦軸は，消費水準にたいする効用関数$u(c)$を表す。上図から絶対的リスク回避度$A_R(\bar{c})$が高くなるにつれ，効用関数の凹型が大きくなることがわかる[21]。主観的確率分布の集合$\mathbb{P}$のうち，たとえばc_uの主観的確率を$\pi_A = 3/4$あるいは$\pi_B = 1/4$として，２つの主観的確率分布$\mathbb{P} = \{(\pi_A, 1-\pi_A), (\pi_B, 1-\pi_B)\}$から

なるケースを考える[22]。ここで，π_Aとπ_Bは可能性のある確率であり，$0 \leq \pi_B \leq \pi_A \leq 1$とする。このことは，主観的確率分布$A$が主観的確率分布$B$よりも楽観的であることを意味している。意思決定者の$\mathbb{P}$にたいする主観的事前空間分布は，$\Psi = (\psi, 1-\psi)$であり，Ψの増加は，楽観主義の増大と解釈できる。$\mathrm{E}_A[u(\tilde{c})] = \pi_A u(c_d) + (1-\pi_A)u(c_u)$であり，そのとき条件付き確実性等価消費水準を$CE_A$とすると，$\mathrm{E}_A[u(\tilde{c})] = u(CE_A)$となる。$B$も同様である。一般的に$\mathrm{E}_\Pi[u(\tilde{c})] = u(CE_\Pi)$であり，任意の期待効用値と確実性等価消費水準の効用値が等しい。すなわち$E_\Pi[u(\tilde{c})] = u(CE_\Pi)$のとき，消費水準が$c_\Pi$となり，そのときの主観的確率分布$\Pi$を条件としたリスクプレミアム$\rho_\Pi(= c_\Pi - CE_\Pi)$となる。主観的確率分布$A$を条件とした期待効用$\mathrm{E}_A[u(\tilde{c})]$と主観的確率分布$B$を条件とした期待効用$\mathrm{E}_B[u(\tilde{c})]$は，それぞれ確実性等価期待消費水準$CE_A$と$CE_B$の効用$u(CE_A)$と$u(CE_B)$に等しく，分散はゼロであり，よって$\xi$はゼロである。図１の下図の横軸は，確率分布$\Pi$を条件とした主観的期待効用値$\mathrm{E}_\Pi[u(\tilde{c})]$を表し，縦軸は，曖昧さ関数$\phi(\mathrm{E}_\Pi[u(\tilde{c})])$を表す。

近年の学術研究では，この曖昧さの尺度を使用した実証研究も行われている。ここで，曖昧さ回避係数について概観する。Ghirardato and Marinacci (2002) は，絶対的危険回避度の概念に基づいて，絶対的曖昧さ回避度の概念を提案している。KMM が考えるモデルでは， CAAA または一定の相対的曖昧さ回避度（CRAA：Constant Relative Ambiguity Aversion）に対応できると述べている。関数として代表的なものは，それぞれ負の指数型関数とベキ型関数である。CAAA は，ほとんどの曖昧さモデルで前提されており，Schmeidler (1989), Ghirardato, Marinacci and Marinacci (2004), Maccheroni, Marinacci and Rustichini (2006), Grant and Polak (2013), Marinacci (2015), Izhakian (2017), Izhakian and Yermack (2017), Ballon and Placidd (2019), Izhakian (2020), Coiculescu, Izhakian and Ravid (2024) などによって使用されている。また CRAA は，Chateauneuf and Faro (2009), Hara, Mukerji, Riedel and Tallon (2022) などによって使用されている。Gilboa and Schmeidler (1989) と Gollier (2008) は CAAA と CRAA，Baillon and Placido (2019) は，Ellsberg のパラドクスの単純な変形を使用して，CAAA と CRAA の検証を提案した。また Izhakian, Yermack and Zender (2022) は，非正の絶対的曖昧さ回避度を使用している。

5. HARA 型効用関数

Ingersoll(1987)と Merton(1969)が設定した HARA 型効用関数（Hyperbolic Absolute Risk Aversion Utility Function）を修正した(8.1)～(8.4)式の HARA 型効用関数を使用する[23]。

$$u_h(\bar{c}) = \frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma + \varsigma), \quad \beta > 0, \quad \gamma \neq 1, \tag{8.1}$$

$$\Gamma(\bar{c}) > 0 \quad if \quad -\infty < \gamma < \infty, \tag{8.2}$$

$$\varsigma = -1 \quad if \quad \gamma \to 0 \tag{8.3}$$

$$\eta = 1 \quad if \quad \gamma \to -\infty, \tag{8.4}$$

ここでγ，β，η，ςはパラメータを表し，

$$\Gamma(\bar{c}) \equiv \frac{\beta\bar{c}}{1-\gamma} + \eta \tag{9}$$

である。また(8.3)式のパラメータ操作により，次式の対数型効用関数となり，(8.4)式のパラメータ操作により，(8.1)式のパラメータ操作により，次式の負の指数効用関数となる。

$$u_l(\bar{c}) \equiv \lim_{\gamma\to 0} u_h(\bar{c})\Big|_{\zeta=-1} = ln(\beta\bar{c} + \eta), \qquad u_e(\bar{c}) \equiv \lim_{\gamma\to -\infty} u_h(\bar{c})\Big|_{\eta=1} = -\left(e^{-\beta\bar{c}} + \varsigma\right). \tag{10}$$

補助定理 1 曖昧性経済下で$\bar{c} \geq 0$。$u'(\bar{c}) > 0$，$u''(\bar{c}) < 0$とするとき，意思決定者の選好が絶対的リスク回避度$A_R(\bar{c})$と相対的リスク回避度$R_R(\bar{c})$と効用関数のパラメータの関係は，ベキ型効用関数

で$\gamma < 1$ならばDARA，$\eta < 0$ならばDRRAである。対数型効用関数ならばDARA，$\eta > 0$ならばIRRAである。負の指数型効用関数ならばCARA，$\beta > 0$ならばIRRAである（証明はAppendix B）。

6. 曖昧さ関数

Izhakian and Benninga (2011) を参考に，(12)式のようなベキ型曖昧さ関数と対数型曖昧さ関数を定義する。

$$\phi\big(u(c)\big) = \begin{cases} \dfrac{u(c)^{1-\theta}}{1-\theta}, & \theta \neq 1, \quad (12.1) \\ \ln\big(u(c)\big), & \theta = 1, \quad (12.2) \end{cases}$$

また負の指数型曖昧さ関数を(13)式と定義する。

$$\phi\big(u(c)\big) = -\big(e^{-\lambda u(\bar{c})} + \varepsilon\big) \tag{13}$$

絶対的曖昧さ回避度$A_A\big(u(\bar{c})\big)$と相対的曖昧さ回避度$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を(13)式とする。

$$A_A\big(u(\bar{c})\big) = -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}, \qquad R_A\big(u(\bar{c})\big) = -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u(\bar{c}). \tag{14}$$

補助定理 2　曖昧性経済下で$\bar{c} \geq 0$，$\phi'\big(u(\bar{c})\big) > 0$，$\phi''\big(u(\bar{c})\big) < 0$とするとき，意思決定者の選好が絶対的曖昧さ回避度$A_A(\bar{c})$と相対的曖昧さ回避度$R_A(\bar{c})$と効用関数のパラメータの関係は，ベキ型曖昧さ関数ならばDAAA，CRAAである。対数型曖昧さ関数ならばDAAA，CRAAである。負の指数型効用関数ならばCAAA，$\lambda > 0$ならばIRRAである（証明はAppendix C）。

定理 1　$\bar{c}, \xi(\bar{c}) \geq 0$と$u'(\bar{c}), \phi'\big(u(\bar{c})\big) > 0$，$u''(\bar{c}), \phi''\big(u(\bar{c})\big) < 0$を前提として，表 1 は実現可能な効用関数と曖昧さ関数の組合せとそのときのリスク回避度・曖昧さ回避度と限界変化率とパラメータの十分条件を示す[24]。表 1 は実現可能な効用関数と曖昧さ関数の組合せと$\bar{c}$に関する曖昧さ回避度・限界変化率の組合せを表す。

定理 1 の組合せの下で，効用関数$u(\bar{c})$との曖昧さ関数$\phi\big(u(\bar{c})\big)$の関係と曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$を特性は次のようになる。

補助定理 3　任意の$\bar{c}(\geq 0)$に関して，$u(\bar{c}) \geq \phi\big(u(\bar{c})\big)$，$\xi(\bar{c}) \geq 0$である。$\bar{c} \to \infty$のとき，ベキ型・指数型効用関数の場合$u(\bar{c}) > \phi\big(u(\bar{c})\big)$，負の指数型効用関数と(12.1)式のベキ型曖昧さ関数あるいは(12.2)式の負の指数型曖昧さ関数の場合$u(\bar{c}) > \phi\big(u(\bar{c})\big)$である。負の指数型効用関数と(13)式の負の指数型曖昧さ関数の場合ζとεの大小関係によって$u(\bar{c})$と$\phi\big(u(\bar{c})\big)$の大小関係が決定する。また$\bar{c} \to \infty$のとき，ベキ型・指数型効用関数の場合$\lim_{\bar{c}\to\infty} \xi(\bar{c}) = 0$，負の指数型効用関数の場合$\lim_{\bar{c}\to\infty} \xi(\bar{c}) > 0$である。$\bar{c}$の増加によって曖昧さプレミアムは減少し，ゼロ以上の漸近線を持つが，$\bar{c}$が増えるほど効用は飽和するので，曖昧さの影響が相対的に小さくなり，曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$が減少する（証明はAppendix D）。

一例として，図2.1は$\beta = 1, \eta = 2, \zeta = 2, \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]} = \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]} = 15\%, \mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2] = 7.5\%$として，横軸を$\bar{c}$，第 1 縦軸を対数型効用値$u(\bar{c})$と対数型曖昧さ値$\phi\big(u(\bar{c})\big)$，第 2 縦軸を曖昧さプレミアム値$\xi(\bar{c})$を表している。図 2.2 は$\beta = 1, \eta = 0.5, \zeta = -5, \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]} = \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]} = 15\%, \mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2] = 7.5\%$として，横軸を$\bar{c}$，第 1 縦軸を負の指数型効用値$u(\bar{c})$とベキ型曖昧さ値$\phi\big(u(\bar{c})\big)$，第 2 縦軸を曖昧さプレミアム値$\xi(\bar{c})$を表している。効用関数と曖昧さ関数と曖昧さプレミアムの各曲線の形状は図 2.1 と変わりはない。$\bar{c}$に関する$\phi\big(u(\bar{c})\big)$の 1 階・2 階の導関数は次式となる。

表 1．リスク回避度・曖昧さ回避度の組合せとパラメータの十分条件

No.	効用関数の型	曖昧さ関数の型	絶対リスク回避度$A_R(\bar{c})$と限界変化率$A_R'(\bar{c})$	相対リスク回避度$R_R(\bar{c})$と限界変化率$R_R'(\bar{c})$	絶対曖昧さ回避度$A_A(\bar{c})$と限界変化率$A_A'(\bar{c})$	相対曖昧さ回避度$R_A(\bar{c})$と限界変化率$R_A'(\bar{c})$	回避度の組合せ	パラメータの十分条件
1	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$,	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}$, $-\frac{\beta^2}{(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\Gamma(\bar{c})}$, $-\frac{\beta\eta}{\Gamma(\bar{c})^2}$	$\frac{\theta}{u(\bar{c})}$, $-\frac{\theta}{u(\bar{c})^2}$	θ, 0	DARA, IRRA, DAAA, CRAA	$\beta,\eta,\theta>0$, $\theta\neq 1$, $\zeta>-\eta^\gamma$, $0<\gamma<1$,
2	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$,	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}$, $-\frac{\beta^2}{(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\Gamma(\bar{c})}$, $-\frac{\beta\eta}{\Gamma(\bar{c})^2}$	$\frac{1}{u(\bar{c})}$, $-\frac{1}{u(\bar{c})^2}$	1, 0	DARA, IRRA, DAAA, CRAA	$\beta,\eta>0$, $0<\gamma<1$, $\zeta>-\eta^\gamma$,
3	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$,	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}$, $-\frac{\beta^2}{(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\Gamma(\bar{c})}$, $\frac{\beta\eta}{\Gamma(\bar{c})^2}$	λ, 0	$\lambda u(\bar{c})$, λ	DARA,IRRA,CAAA,IRAA	$\beta,\eta,\lambda>0$, $0<\gamma<1$, $\Gamma(\bar{c})>0$,
4	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}$, $-\frac{\beta^2}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\beta\bar{c}+\eta}$, $\frac{\beta\eta}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	$\frac{\theta}{u(\bar{c})}$, $-\frac{\theta}{u(\bar{c})^2}$	θ, 0	DARA,IRRA,DAAA,CRAA	$\beta,\theta>0$, $\eta>1$,
5	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}$, $-\frac{\beta^2}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\beta\bar{c}+\eta}$, $\frac{\beta\eta}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	$\frac{1}{u(\bar{c})}$, $-\frac{1}{u(\bar{c})^2}$	1, 0	DARA,IRRA,DAAA, CRAA	$\beta>0$, $\eta>1$,
6	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}$, $-\frac{\beta^2}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	$\frac{\beta\bar{c}}{\beta\bar{c}+\eta}$, $\frac{\beta\eta}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}$	λ, 0	$\lambda u(\bar{c})$, λ	DARA,IRRA,CAAA,,IRAA	$\beta,\eta,\lambda>0$,
7	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	β, 0	$\beta\bar{c}$, β	$\frac{\theta}{u(\bar{c})}$, $-\frac{\theta}{u(\bar{c})^2}$	θ, 0	CARA,IRRA,DAAA,CRAA	$\beta,\theta>0$, $\zeta<-1$,
8	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	β, 0	$\beta\bar{c}$, β	$\frac{1}{u(\bar{c})}$, $-\frac{1}{u(\bar{c})^2}$	1, 0	CARA,IRRA,DAAA, CRAA	$\beta>0$, $\varsigma<-1$,
9	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	β, 0	$\beta\bar{c}$, β	λ, 0	$\lambda u(\bar{c})$, λ	CARA,IRRA,CAAA,,RAA	$\beta,\lambda>0$.

※ $\Gamma(\bar{c})=\frac{\beta\bar{c}}{1-\gamma}+\eta$

表 2．リスク回避度・曖昧さ回避度と$\bar{c}$に関する曖昧さ回避度・限界変化率の組合せ

No.	効用関数の型	曖昧さ関数の型	$\bar{c}$に関する絶対曖昧さ回避度$A_\phi(\bar{c})$	$\bar{c}$に関する限界変化率$A_\phi'(\bar{c})$	$\bar{c}$に関する相対曖昧さ回避度$R_\phi(\bar{c})$	$\bar{c}$に関する限界変化率$R_\phi'(\bar{c})$
$\beta,\eta,\theta,\lambda>0$, $0<\gamma<1$, $\zeta>-\eta^\gamma$						
1	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\left\{1+\frac{\gamma\theta\Gamma(\bar{c})^\gamma}{(1-\gamma)(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)^2}\right\}>0$	$-\frac{\beta^2}{1-\gamma}\left\{1+\frac{\gamma\theta\Gamma(\bar{c})^{\gamma-1}}{(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)^2}\left(\zeta+\frac{\Gamma(\bar{c})^\gamma}{1-\gamma}\right)\right\}<0$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\left\{\theta\Gamma(\bar{c})^\gamma+\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta\right\}>0$	$\beta^2\Gamma(\bar{c})^{\gamma-2}\left\{1-\theta+\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(1+\frac{1}{\beta}\right)(1+\Gamma(\bar{c})^\gamma)\right\}<0$
2	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\left\{1+\frac{\gamma\Gamma(\bar{c})^\gamma}{(1-\gamma)(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)}\right\}>0$	$-\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\right)^2\left[1+\gamma\Gamma(\bar{c})^{\gamma-1}\left\{+\frac{\gamma\Gamma(\bar{c})^\gamma}{(1-\gamma)(\gamma\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)^2}\right\}\right]<0$	$\frac{\beta}{\gamma\Gamma(\bar{c})}\{\Gamma(\bar{c})^\gamma+(1-\gamma)\zeta\}>0$	$-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\right)^2(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)<0$
3	$u(\bar{c})=\frac{1-\gamma}{\gamma}(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\varsigma)$	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}(1+\lambda\Gamma(\bar{c})^\gamma)>0$	$-\frac{1}{1-\gamma}\left(\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\right)^2\{1+\lambda(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^\gamma\}<0$	$\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\left(\frac{1-\gamma}{\gamma}\right)(1+\lambda\Gamma(\bar{c})^\gamma)(\Gamma(\bar{c})^\gamma+\zeta)>0$	$-\frac{1}{\gamma}\left(\frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})}\right)^2[\{\zeta+(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^\gamma\}(1+\lambda\Gamma(\bar{c})^\gamma)]>0$
$\beta,\theta,\lambda>0$, $\eta>1$,						
4	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	$\frac{1}{\beta\bar{c}+\eta}\left\{1+\frac{\theta}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}>0$	$-\left(\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\right)^2\left[1+\theta\left\{\frac{1}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}+\frac{1}{ln^2(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}\right]<0$, $\theta>0$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\{\theta+ln(\beta\bar{c}+\eta)\}>0$	$\frac{\beta}{(\beta\bar{c}+\eta)^2}\left[\eta\left\{1+\frac{\theta}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}-\frac{\beta\theta\bar{c}}{ln^2(\beta\bar{c}+\eta)}\right]$
5	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\left\{1+\frac{1}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}>0$	$-\left(\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\right)^2\left\{1+\frac{1}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}+\frac{1}{ln^2(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}<0$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\left\{1+\frac{1}{ln(\beta\bar{c}+\eta)}\right\}>0$	$-\left(\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\right)^2 ln(\beta\bar{c}+\eta)$
6	$u(\bar{c})=\ln(\beta\bar{c}+\eta)$	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	$\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}(1+\lambda)>0$	$-\left(\frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}\right)^2(1+\lambda)<0$	$\frac{\beta\bar{c}}{\beta\bar{c}+\eta}(1+\lambda)>0$	$\frac{\beta\eta}{\beta\bar{c}+\eta}(1+\lambda)>0$
$\beta,\theta>0$, $0<\lambda<1$, $\zeta<-1$						
7	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\frac{u(\bar{c})^{1-\theta}}{1-\theta}$	$\beta\left(1-\frac{\theta}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)>0$	$\left(\frac{\beta}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)^2\zeta\theta e^{\beta\bar{c}}<0$	$\beta\bar{c}\left(1-\frac{\theta}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)>0$	$\beta\left\{1-\frac{\theta}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\left(1+\frac{\beta\zeta\bar{c}e^{\beta\bar{c}}}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)\right\}$
8	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=\ln(u(\bar{c}))$	$\beta\left(1-\frac{1}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)>0$	$\left(\frac{\beta}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)^2\zeta e^{\beta\bar{c}}>0$	$\beta\bar{c}\left(1-\frac{1}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)>0$	$\beta\left\{1-\frac{1}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\left(1+\frac{\beta\zeta\bar{c}e^{\beta\bar{c}}}{1+\zeta e^{\beta\bar{c}}}\right)\right\}$
9	$u(\bar{c})=-(e^{-\beta\bar{c}}+\zeta)$	$\phi(u(\bar{c}))=-(e^{-\lambda u(\bar{c})}+\varepsilon)$	$\beta(1+\lambda e^{-\beta\bar{c}})>0$	$-\lambda\beta^2e^{-\beta\bar{c}}<0$	$\beta\bar{c}(1+\lambda e^{-\beta\bar{c}})>0$	$\beta\bar{c}\{1+\lambda(1-\beta\bar{c})e^{-\beta\bar{c}}\}$

$$\frac{d\phi(u(\bar{c}))}{d\bar{c}}=\phi'(u(\bar{c}))u',\quad \frac{d^2\phi(u(\bar{c}))}{d\bar{c}^2}=\phi''(u(\bar{c}))(u')^2+\phi(u(\bar{c}))u''. \tag{15}$$

したがって$\bar{c}$に関する絶対的曖昧さ回避度$A_\phi(\bar{c})$と相対的曖昧さ回避度$R_\phi(\bar{c})$は

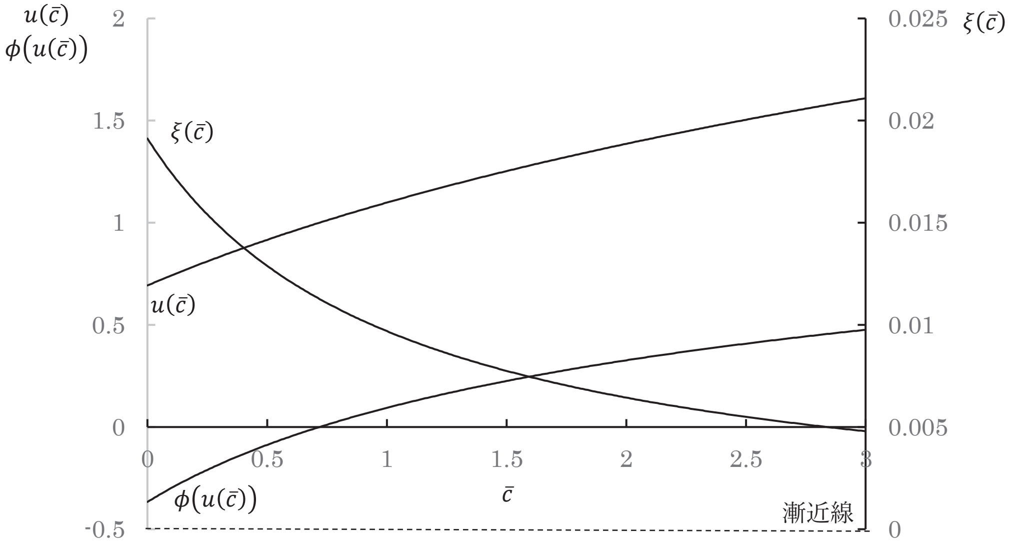

図2.1　対数型効用関数・対数型曖昧さ関数

$$\left(\beta = 1, \eta = 2, \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]} = \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]} = 15\%, \mathrm{Cov}_\Psi\left[c_\Pi, \sigma_\Pi^2\right] = 7.5\%,\right)$$

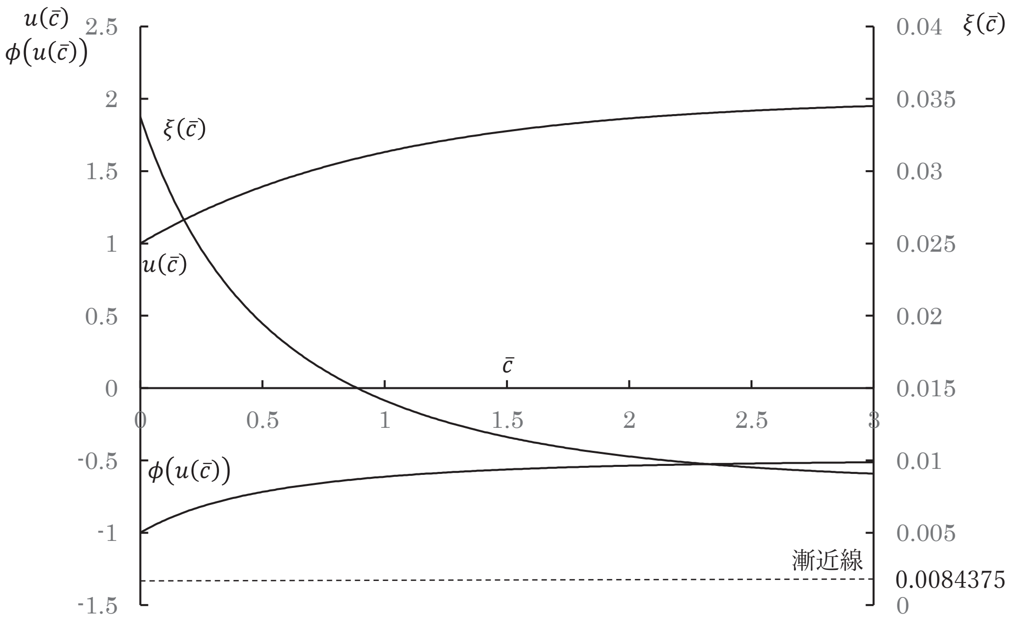

図2.2　負の指数型効用関数・ベキ型曖昧さ関数

$$\left(\beta = -1, \zeta = -2, \theta = 2, \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi]} = \sqrt{\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]} = 15\%, \mathrm{Cov}_\Psi\left[c_\Pi, \sigma_\Pi^2\right] = 7.5\%,\right)$$

$$A_\phi(\bar{c}) = -\frac{d^2\phi\big(u(\bar{c})\big)/d\bar{c}^2}{d\phi\big(u(\bar{c})\big)/d\bar{c}} = -A_A(\bar{c})u'(\bar{c}) - \frac{u''}{u'}, \qquad R_\phi(\bar{c}) = uA_\phi(\bar{c}). \tag{16}$$

補助定理 4　(12.1)式のベキ型曖昧さ関数の場合，

$$A_\phi(\bar{c}) = A_R(\bar{c}) - \frac{u'}{u}\theta, \qquad R_\phi(\bar{c}) = R_R(\bar{c}) - u'\theta. \tag{17.1}$$

(12.2)式の対数型曖昧さ関数の場合，

$$A_\phi(\bar{c}) = A_R(\bar{c}) + \frac{u'}{u}, \qquad R_\phi(\bar{c}) = R_R(\bar{c}) + u'. \tag{17.2}$$

(13)式の負の指数型曖昧さ関数の場合，

$$A_\phi(\bar{c}) = A_R(\bar{c}) + \lambda u', \qquad R_\phi(\bar{c}) = R_R(\bar{c}) + \lambda u u'. \tag{17.3}$$

$A_\phi(\bar{c}) < A_R(\bar{c})$と$R_\phi(\bar{c}) < R_R(\bar{c})$となる。

$\bar{c}$に関する絶対的曖昧さ回避度$A_\phi(\bar{c})$と$\bar{c}$で微分した絶対的曖昧さ回避度の変化率$dA_\phi(\bar{c})/d\bar{c}$は次式である。

$$\frac{dA_\phi(\bar{c})}{d\bar{c}} = A_A'\big(u(\bar{c})\big)u' + A_A\big(u(\bar{c})\big)u'' - \frac{u'''u' - (u'')^2}{(u')^2}$$

$$= -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)^2 - \phi'''\big(u(\bar{c})\big)\phi'\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)^2}u' - \frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u' - \frac{u'''(\bar{c})u' - (u'')^2}{(u')^2}.$$

$\bar{c}$に関する相対的曖昧さ回避度$R_\phi(\bar{c})$と$\bar{c}$で微分した相対的曖昧さ回避度の変化率$dR_\phi(\bar{c})/d\bar{c}$は次式である。

$$\frac{dR_\phi(\bar{c})}{d\bar{c}} = A_A\big(u(\bar{c})\big)u' - u'' + u\left\{A_A'\big(u(\bar{c})\big)u' + A_A\big(u(\bar{c})\big)u'' - \frac{u'''u' - (u'')^2}{(u')^2}\right\}$$

$$= -\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u' - u'' + u\left\{\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)^2 - \phi'''\big(u(\bar{c})\big)\phi'\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)^2}u' - \frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)}u'' - \frac{u'''u' - (u'')^2}{(u')^2}\right\}.$$

定理 2　$\bar{c}, \xi(\bar{c}) \geq 0$，$u', u'', \phi'\big(u(\bar{c})\big), \phi''\big(u(\bar{c})\big), Y\big(A(\bar{c})\big) > 0$を前提として，定理 1 の絶対的/相対的リスク・曖昧さ回避度の組合せと$\bar{c}$に関する曖昧さ回避度の実現可能な組合せは表 2 となる。

7.　曖昧さプレミアム

定理 3　$\bar{c}$が与える$\xi\big(u(\bar{c})\big)$にあたえる限界曖昧性変化率$d\xi(\bar{c})/d\bar{c}$を求める。

$$\frac{d\xi(\bar{c})}{d\bar{c}} = \frac{1}{2}\Bigg[\left\{\left(A_A^2 - \frac{\phi'''}{\phi'}\right)(u')^2 + u''A_A + u'A_R + uA_R'\right\}Y(A_R)$$

$$+(u'A_A + uA_R)\left(\mathrm{Cov}_\Psi[c_\Pi, \sigma_\Pi^2] + \frac{1}{2}\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]\right)A_R'\Bigg] < 0. \tag{18}$$

第 1 項は$\bar{c}$の増加がリスク・曖昧さ回避の心理的感度をどう変化させるか，すなわち$\bar{c}$1 単位の変化が曖昧さプレミアムにどれだけ影響を与えるかを決める心理的な感度を表し，リスク・曖昧さ回避がともに強いほど曖昧さプレミアムの水準も変化率もなくなることを意味する。第 2 項は$\bar{c}$の増加がリスク回避の構造A_Rをどの方向に変化するかを意味する。

8.　おわりに

リスクとともに曖昧さを導入することで，経済における曖昧性をより明確に把握することができる。曖昧さとは，より具体的にはリスクの尺度を構成する確率に関する不確実性と解釈するという考えがあり，曖昧さの尺度のひとつの解釈は，確率のボラティリティで測定しようとする指標の考えである。確実性等価消費水準$\bar{c}$の増加にともない，効用水準マイナス曖昧さ水準は拡大していき，曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$が減

少することを示した。本論文では，リスク回避度と曖昧さ回避度の組み合せから実現可能な効用関数と曖昧さ関数に焦点を当て，不確実性プレミアムのうち曖昧さプレミアムの特性をリスクプレミアムとの関連から明らかにした。しかしながらリスク・曖昧さプレミアムからなる総合的な不確実性プレミアムに関しては不十分な分析に終わっている。次回は確実性等価確率と不確実性プレミアムの関係をより具体的に検証したい。

注

[1] 加藤英明 監訳 p1124（2009）から引用。

[2] 最尤法により，1次と2次モーメントのパラメータの推定を行い，ラグ付きボラティリティの2乗とラグ付き残差の2乗を説明変数とした条件付きボラティリティの2乗の計測を行う。Engle（1982）は，OLS の時系列モデルを含む新たに ARCH モデルを創作し，Bollerslev（1986）は，ARCH モデルを GARCH モデルに一般化した。その後これまでにさまざまな応用モデルが展開されてきた。

[3] のちに平滑（曖昧性）（決定）モデルなどとも呼ばれる。

[4] Daniel Bernoulli は期待効用理論を発案し，彼の叔父である Jakob Bernoulli はベルヌーイ分布で知られる。またサンクトベルクのパラドックスは従弟の Nicolaus I Bernoulli が考案した。

[5] 個人は自分の富が「慣例的な」富よりも上である場合と下である場合では，個人の行動が異なると，

Markowitz は主張する。Alliais は vNM の独立公理を論評して，多くの専門家がそれに違反しがちな例を挙げている。

[6] 人は確実なものを好み，不確実なものを嫌うという「確実性効果」を反映し，大きな確率を過小評価し，逆に小さな確率を過大評価する「可能性効果」という主観的な確率認識を示唆する。

[7] 損失回避とは，同じ金額の利益を得る可能性のある正の効用の大きさよりも，同じ金額の損失を被る可能性のある負の効用の大きさの方が，大きい負の心理的傾向をいう。処分効果とは，株価が上昇した株式を早期に売却し，下落した株式を保有し続ける意向がある効果をいう。すなわち投資家が利益を確定することよりも，損失を回避することを重視する心理的な要因が基づいていると論じる効果である。感応度逓減とは，利得や損失が大きくなるにつれて価値へ与える影響が徐々に小さくなることをいう。

[8] 参照点は購入時点での価格と考えることができる。

[9] 客観的確率を$0 < p < 1$，その主観的確率を$\pi(p)$とする。このとき次のような「劣確実性（subcertainty）」の性質が出てくる。

$$\pi(p) + \pi(1-p) < \pi(1) = 1$$

また任意の$0 < p, q, r < 1$にたいして，$\frac{\pi(pq)}{\pi(p)} < \frac{\pi(pqr)}{\pi(pr)}$となる「劣比率性（subproportionality）」と呼ばれる性質もある（黒川博文（2024）を参照）。

[10] Francis（2022）は一部訂正している。

[11] Srivastava, Aggarwal and Mehra（2022）と Srivastava, Aggarwal and Bansai（2024）は，Nifty-50 の上場株式（インドの国立証券取引所）データを使用している。

[12] ここで$\phi'(u(\bar{c})) = d\phi(u(\bar{c}))/du(\bar{c})$, $\phi''(u(\bar{c})) = d^2\phi(u(\bar{c}))/du(\bar{c})^2$, $A_A'(\bar{c}) = \phi'(u(\bar{c}))u'(\bar{c}) > 0$，$A_A''(\bar{c}) = \phi''(u(\bar{c}))u'(\bar{c}) + \phi'(u(\bar{c}))u''(\bar{c}) < 0$を表す。

[13] Epstein and Zhang（2001）は，選択対象が Savage スタイルの行為である抽象的な設定による(主観的な)曖昧さの行動的定義を提案する。特に，意思決定者の確率測度の領域と値が，選好から導出され，この結果は，Knight 流のリスクと曖昧さの区別にたいする意思決定の基盤を提供する。

[14] 絶対的曖昧さ回避の概念を明示している。

[15] 不確実性下で合理的な意思決定を分析するため，期待効用理論に基づいた理論モデルで，不確実性下の行為を数学的に表現する方法の一つである。

[16] Izhakian and Binninga（2011）の Appendix の Lemma 1 を参照。
[17] 式の証明は，Izhakian and Binninga（2011）の「定理 1 の証明」を参照。

[18] $\circ$は合成写像を表す。あるいは$v(x) = \phi(u(x))$である。
[19] 直感的に違いを理解すると，富が 10 倍に増加したときに，絶対的リスク回避度$A(\bar{c})$の高い投資家は，富の増加前と「同額の損失額」を同じ損失感で感じる一方，相対的リスク回避度$R(\bar{c})$の高い投資家は，富の増加前と「同率の損失」を同じ損失感で感じる。よって絶対的リスク回避度は「富全体」に対してどれだけリスクを回避したいかを表し，相対的リスク回避度は「富の割合」に対してどれだけリスクを回避したいかを表す。

[20] 単一の空間状態を想定しないか，主観的（事前空間集合の）期待値$\mathrm{E}_\Psi[\cdot]$をとる前のc_Πとσ_Π^2は確率変数であることに注意。

[21] この図から，絶対的リスク回避度が高くなるにつれ，効用関数の凹型が大きくなり，効用関数値が無限に近づくにしたがって，曲率は直角に近づく。
[22] 効用関数$u(c)$が，線形関数ではないので，$CE_\Pi \neq \pi_\Pi c_d + (1-\pi_\Pi)c_u$であることに注意。$\Pi$は，$A$または$B$でもある。

[23] Ingersoll（1987）と Merton（1969）は下記の HARA 型効用関数を設定している。

$$u(x) = \frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta\right)^{\gamma}, \quad -\infty < \gamma < \infty, \quad \gamma \neq 1, \quad \beta > 0, \quad \frac{\beta x}{1-\gamma} + \eta > 0.$$

ここでγ, β, ηはパラメータを表す。しかし彼らが考える上記の関数のパラメータ操作によって，明確に対数型関数を導出することはできない。そこでパラメータ操作によって，明確に対数型関数を含む修正した HARA 型効用関数を(8)式と定義する。

以下，下付き文字のhの効用関数を HARA 型，eを負の指数型，lを対数型効用関数に限定したケースを表す。

[24] 回避度の組み合わせは3^4通りであるが，パラメータの前提条件を満たす実現可能な組合せは3^2通りである。

参考文献

池田新介，岡田克彦，2025，「金融市場の行動経済学」，日経BP/の本経済新聞，pp.235-353.

岩井克俊，2019「経済学における「曖昧性」の解釈」，『経済論叢（京都大学)』,第193巻第1号,pp.123-130.

加藤英明 監訳，2009.「金融経済学ハンドブック2 金融市場と資産価格」『18章 行動ファイナンスサーベイ』，丸善，(Constantinides, G.M, M. Marris, and R. M. Stulz,, 2003. ”Chapter 19 - Market Liquidity-Theory and Empirical Evidence,” In *Handbook of the Economics of Finance 1B*, Elsevier B.V.)

黒川博文，2024. 「分析者のための行動経済学入門 プロスペクト理路からナッジまで，人間行動を深く網羅的に解明する」，『第4章 不確実性下の意思決定を分析：期待効用理論とプロスペクト理論』，ソシム，pp.113-156.

中川裕司，1992，「連続時間確率モデルによる有限期間の最適消費・ポートフォリオ選択問題」，日本経営数学会誌，14，(6月)，pp.85-97.

――――，1993，「拡張HARA型効用関数下での賃金所得を含む連続時間最適消費・ポートフォリオ選択問題の解法」，奈良県立商科大学『研究紀要』,3(4)，pp.27-39.

Abdellaoui, M., H. Bleichrodt, and C. Paraschiv, 2007, ”Loss Aversion Under Prospect Theory: A Parameter-Free Measurement,” *Management Science*, 53(10), pp.1659-1674.

Allais, M., 1953, “Le Comportement de L’Homme Rtionel devaut le Rosque: Critique desPostulats et Axiomes de L’Ecole Americaine,” *Econometrica*, 21(4), pp.503-546.

Anscombe, F. J. and R. J. Aumann, 1963, “A Definition of Subjective Probability,” *The Annals of Mathematical and Statistics*, 34(1), pp.199-205.

Arrow, K., 1970, *Essays in the Theory of Risk-Bearing*, North-Holland Pub. Co, North Holland American Elsevier.

Augustin, P. and Y. Izhakian, 2020, “Ambiguity, Volatility, and Credit Risk,” *Review of Financial Studies*, 33(4), pp.1618-1672.

Baillon, A., and L. Placido, 2019, ”Testing Constant Absolute and Relative Ambiguity Aversion,” *Journal of Economic Theory*, 181, pp.309-332.

Baillon, A., B. Driesenb, and P. P. Wakker, 2012, ”Relative Concave Utility for Risk and Ambiguity,” *Games and Economic Behavior*, 75(2), pp.481-489.

Barberis, N., and W. Xiong, 2009, ”What Drives the Disposition Effect? An Analysis of a Long-Standing Preference-Based Explanation,” *Journal of Finance*, 64(2), pp.751-784.

Barberus, N., A. Mukherjee, and B. Wang, 2016, ”Prospect Theory and Stock Returns: An Empirical Test,” *Review of Financial Studies*, 29(11), pp. 3068-3107.

Ben-Rephael, A and Y. Izhakian, 2020, “Should I Stay or Should I Go? Trading Behavior Under Ambiguity,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3628757.

Ben-Rephael, A., J.A. Cookson and Y. Izhakian, 2022, “Trading, Ambiguity and Information in the Options Market,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4180712.

Bollerslev, T., 1986, “Generalized Autoregessive Conditional Heteroskedasticity,” *Journal of*

Econometrica, 31(3), pp.307-327.

Brenner, M., and Y. Iz.hakian, 2018. ”Asset pricing and ambiguity: Empirical evidence,” *Journal of Financial Economics*, 130(3), pp. 503-531.

Brenner, M., Y. Izhakian, and O. Sade, 2011, “Ambiguity and Overconfidence,” https://archive.nyu.edu/bitstream/2451/31332/2/Ambg%2011-2-28.F.pdf.

Chai, J., Z. Weng, and W. Liu, 2021, ”Behavioral Decision Making in Normative and Descriptive Views: A Critical Review of Literature,” *Journal of Risk Financial Management.* 14(10),pp.1-14.

Chateaneuf, A. and J. H. Faro, 2009, “Ambiguity through Confidence Function,” *Journal of Mathematical Economics*, 45(9-10), pp.535-558.

Chen, A., S. Vanduffel and W. Morten, 2025, “Optimal Payoff under Smooth Ambiguity,” *Journal of Operational Research*, 320(3), pp.754-764.

Chew, S. H. and J. S. Sagi, 2008, “Small Worlds: Modeling Attitudes toward Sources of Uncertainty,” *Journal of Economic Theory*, 139(1), pp.1-24.

Choquet, G., 1953-54, “Theory of Capacities,” *Annals de L’Institut Fourier*, 5, pp.131-295.

Cinfrignini, A., D. Petturiri, and B. Vantaggi, 2024, ”Behavioral Dynamic Portfolio Selection via Epsilon-Contaminations,” *Information Processing and Management of Uncertainty in Knowledge-Based Systems*, pp.182-194.

Coiculescu, G., Y. Izhakian and S. A. Ravid, 2024, “Innovation under Ambiguity and Risk,” *Journal of Quantitative Analysis*, 59(7), pp.3190-3229.

Crockett, S., Y. Izhakian and J. C. Jamison, 2019, “Ellsberg's Hidden Paradox,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3423534.

Denti, T., and L. Pomatto, 2022, ”Model and Predictive Uncertainty: A Foundation for Smooth Ambiguity Preferences,” *Econometrica*, 90(2), pp. 551-584.

Edwards, W., 1954, “The Theory of Decision Making,” *Psychological Bulletin,* 51(4), pp.380-417.

Engle, R. F., 1982, “Autoregressive Conditional Heteroscedasticity with Estimate of the United Kingdom Inflation,” *Econometrica*, 50(4), pp.987-1007.

Epstein, L. G., 2010, “Paradox for the “Smoothing Ambiguity” Model of Preference,” *Econometrica*, 78(6), pp.2085-2099.

Epstein, L. G. and J. Zhang, 2001, ”Subjective Probabilities on Subjectively Unambiguous Events,” *Econometrica*, 69(2), pp.265-306.

Ellsberg, D., 1961, ”Risk, Ambiguity, and the Savage Axioms,” *Quarterly Journal of Economics*, 75(4), pp.643-669.

Francis, J. C, 2021, ”Reformulating Prospect Theory to become a von Neumann-Morgenstern Theory,” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 56(3), pp.965-985.

Francis, J. C., 2022, ”Correction to: Reformulating Prospect Theory to Become a von Neumann-Morgenstern Theory,” *Review of Quantitative Finance and Accounting*, 58, pp.435-436.

Fu R., B. Melenberg, and N. Schweizer, 2023, ”Comment on ,”A Theoretical Foundation of Ambiguity

Measurement" [J. Econ. Theory 187 (2020) 105001]," *Journal of Economic Theory*, 207, pp.1-22.

Ghirardato, P., and M. Marinacci, 2002, "Ambiguity Made Precise: A Comparative Foundation," *Journal of Economic Theory*, 102(2), pp.251-289.

Ghirardato, P., F. Marinacci and M. Marinacci, 2004, "Differentiating Ambiguity and Ambiguity Attitude," *Journal of Economic Theory*, 118(2), pp.133-173.

Gilboa, I., 1987, "Expected Utility wit Purely Subjective Non-Additive Probabilities," *Journal of Mathematical Economics*, 16(1), pp.65-88.

Gilboa, I., 2025, "Decision under Uncertainty State of the Science," *Annual Review of Economics,* 17, pp.1-30.

Gilboa, I., and Schmeidler, D, 1989, "Maxmim Expected Utility with Non-unique Prior," *Journal of Mathematical Economics*, 18(2), pp.141-153.

Gollier, C., 2008, "Does Ambiguity Aversion Reinforce Risk Aversion? Applications to Portfolio Choices and Asset Prices," http://www.columbia.edu/~pj2133/ambiguity.pdf.

Grant, S. and B. Polak, 2013, "Men-Dispersion Preferences and Constant Absolute Uncertainty Aversion," *Journal of Economic Theory*, 148(4), pp.1361-1398.

Hara, C, S., Mukerji, F. Riedel and J. M. Tallon, 2025, "Sharing Model Uncertainty," https://shs.hal.science/halshs-04598577v2/document.

Herron, R. and Y. Izhakian, 2025, "Real Investment under Ambiguity: Evidence from Mergers and Acquisitions," https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=348954.

Ilut, C. L. and M. Schneider, 2022, " Modeling Uncertainty as Ambiguity: A Review," https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4080655.

Imai, T., S, Nunnari, J. Wu, and F.M. Vieider, 2025, "Meta-Analysis of Prospect Theory Parameters," https://jilongwu.com/documents/PT_meta_jilong.pdf.

Ingersoll, J. E., Jr, 1987, *Theory of Financial Decision Making*, Rowman and Littlefield, Totowa, New Jersey.

Ingersoll, J. E., Jr, 2014, "Cumulative Prospect Theory, Aggregation, and Pricing," *Critical Finance Review*, 5(2), pp.305-350.

Iwaki, H. and D. Yoshikawa, 2025, "Does Ambiguity Drive the Disposition Effect?," *International Review of Financial Analysis*, 98, 103887.

Izhakian, Y., 2017, "Expected Utility with Uncertain Probability Theory," *Journal of Mathematical Economics*, 69(1), pp.91-103.

Izhakian, Y., 2020, "A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement," *Journal of Economic Theory*, 187, 105001.

Izhakian, Y., 2024, "A Theoretical Foundation of Ambiguity Measurement: A Reply," https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=4828038.

Izhakian, Y., and S. Benninga, 2011, "The Uncertainty Premium in an Ambiguous Economy," *The Quarterly Journal of Finance*, 1(2), pp.323-354.

Izhakian, Y. and D. Yermack, 2017, “Risk, Ambiguity, and the Excise of Employee Stock Options,” *Journal of Financial Economics*, 124(1), pp.65-85.

Izhakian, Y., D. Yermack and J. F. Zender, 2022, ”Ambiguity and the Tradeoff Theory of Capital Structure,” *Management Science*, 68(6), pp.4090-4111.

Izhakian, Y., H. Levy, R. Shalev and E. Zur, 2021, “The Option to Pay Attention,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=3771519.

Kahneman, D., and Tversky, A, 1979, ”Prospect Theory: An Analysis of Decision under Risk,” *Econometrica*, 47(2), pp.263-292.

Klibanoff, P., M. Marinacci, and S. Mukerji, 2005, ”A Smoothing Model of Decision Making under Ambiguity,” *Econometrica*, 73(6), pp.1849-1892.

Knight, F. H., 1921, *Risk, Uncertainty and Profit*, Boston, Houghton Miffin, Revised Hutson Street Press (2025/5/22), ISBN-10：1025141644, ISBN-13： 978-1025141640.

Kopylov, I., 2010, “Simple Axioms for Countably Additive Subjective Probability,” *Journal of Mathematical Economics*, 46(5), pp.867-876.

Kothiyal, A., V. Spinu and P. P. Wakker, 2011, ”Prospect Theory for Continuous Distributions: A Preference Foundation,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 42, pp.195-210.

Li, Y. and L. Yang, 2013, ”Prospect Theory, the Disposition Effect, and Asset Price,” *Journal of Financial Economics*, 107(3), pp. 715-739.

Maccheroni, F., M. Marinacci, and D. Ruffino, 2013, ”Alpha as Ambiguity: Robust Mean-Variance Portfolio Analysis,” *Econometrica*, 81(3), pp.1075-1113.

Maccheroni, F., M. Marinacci, and A. Rustichini, 2006, “Ambiguity Aversion Robustness, and the Variation Representation of Preferences,” *Econometrica*, 74(6), pp.1447-1498.

Machina, M. J. and D. Schmeidler, 1992, “A More Robust Definition of Subjective Probability,” *Econometrica*, 60(4), pp.745-780.

Marinacci, M., 2015, “Model Uncertainty,” *Journal of the European Economic Association*, 13(6), pp.1022-1100.

Markowitz, H., 1952, “The Utility of Wealth, ” *Journal of Political Economy*, 60(2), pp.151-158.

Merton, R. C, 1969, ”Lifetime Portlfolio Selection under Uncertainty: The Continuous-Time Case,” *Review of Economics and Statistics*, 51(3), pp. 247-257. Reprinted in *Continuous-Time Finance*, 1990, Basil Blackwell, Cambridge, Massachusetts.

Nau, R. F., 2006, “Uncertainty Aversion with Second-Order Utilities and Probabilities,” *Management Science*, 52(1), pp.136-145.

Oprea, R., 2024, ”Decisions under Risk are Decisions under Complexity,” *American Economic Review* 114(12), pp.3789-3811.

Park, K. and H. Y. Wong, 2022, ”Robust Consumption-Investment with Return Ambiguity: A Dual Approach with Volatility Ambiguity,” *Journal of Financial Mathematics*, 13(3), pp.1-42.

Pratt, J. W., 1964, ”Risk Aversion in the Small and the Large,” *Econometrica*, 32(1), pp.122-136.

Rocciolo, F., M.Ballio, M. Guidolin and Y. Izhakian, 2024, “Pricing Climate Ambiguity,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=5049349.

Rothschild, M. and J. E. Stiglitz, 1970, “Increasing Risk: I. A Definition,” *Journal of Economic Theory*, 2(3), pp.225-243.

Savage, L. J., 1954, *The Foundations of Statistics,* John Wiley & Sons, Revised Dover Publications; Revised (1972/6/1), ISBN-10：0486623491, ISBN-13：978-0486623498.

Schmeidler, D., 1989, ”Subjective Probability and Expected Utility without Additivity,” *Econometrica*, 57(3), pp. 571-587.

Schmeidler, D., 2011, “Portfolio Choices and Asset Prices: The Comparative Statics of Ambiguity Aversion,” *Review of Economic Studies*, 78(4), pp.1329-1344.

Seo, K. 2009, “Ambiguity and Second-Order Beliefs,” *Econometrica*, 77(5), pp.1575-1605.

Shi, C., 2025, ”Behavioral Finance and Factor Investing,” https://papers.ssrn.com/sol3/papers.cfm?abstract_id=5137986.

Shi, Y., X. Gui, J. Yao and D. Li, 2015, ”Dynamic Trading with Reference Point Adaption and Loss Aversion,” *Operations Research*, 63(4), pp.789-806.

Srivastava, S., A. Aggarwal, and P. Bansal, 2024, ”Efficiency Evaluation of Assets and Optimal Portfolio Generation by Cross Efficiency and Cumulative Prospect Theory,” *Computational Economics*, 63(1), pp.129-158.

Srivastava, S., A. Aggarwal, and A. Mehra, 2022, ”Portfolio Selection by Cumulative Prospect Theory and Its Comparison with Mean-Variance Model,” *Granular Computing*, 7(3), pp.903-916.

Tversky, A., and D. Kahneman, 1981, ”The Framing of Decisions and Psychology of Choice,” *Science*, 211(4481), pp.453-485.

Tversky, A., and D. Kahneman, 1992, ”Advances in Prospect Theory: Cumulative Representation of Uncertainty,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 5(4), pp.297-323.

Uzhga-Rebrov, O. and P. Grabusts, 2021, ”Cumulative Prospect Theory Version with Fuzzy Values of Outcome Estimates,” https://www.mdpi.com/2227-9091/9/4/72.

Wakker, P. P., 2010, “Prospect Theory: For Risk and Ambiguity. Cambridge University,” Press, Cambridge. https://doi.org/10.1017/CBO9780511779329.

Wakker, P. P., 2023, “Further Comments and Elucidations for Wakker (2010) “Prospect Theory: For Risk and Ambiguity,” https://personal.eur.nl/wakker/ptbook/additions/pt_further_comments.pdf.

Wakker, P. P., 2025, ”Relating Risky to Riskless Preferences, and Their Joint Irrationality A Comment on Oprea (2024),” https://personal.eur.nl/wakker/pdf/opreacomment.pdf.

Wakker, P. P., and A. Tversky, 1993, ”An Axiomatization of Cumulative Prospect Theory,” *Journal of Risk and Uncertainty*, 7(2), pp.147-175.

Appendix A

Izhakian and Benninga (2011) の定理１を詳細に示す。不確実性プレミアムδを，個人が曖昧な状況と確実な状況の間で無差別であるような値とすると，δは(A.1)式を満たす。

$$\mathrm{E}_{\Psi}[\phi(\mathrm{E}_{\Pi}[u(\bar{c}-\delta)])]=\phi\big(u(\bar{c}-\delta)\big)=\mathrm{E}_{\Psi}[\phi(\mathrm{E}_{\Pi}[u(\tilde{c})])]. \qquad (A.1)$$

$v(\bar{c})=\phi\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}\big(=\mathrm{E}_{\Psi}[c_{\Pi}]=\mathrm{E}_{\Psi}\big[\mathrm{E}_{\Pi}[\tilde{c}]\big]\big)$で偏微分すると(A.2)式となる。

$$v'(\bar{c})=\frac{d\phi\big(u(\bar{c})\big)}{du(\bar{c})}\frac{du(\bar{c})}{d\bar{c}}=\frac{d\phi\big(u(\bar{c})\big)}{du(\bar{c})}u'(\bar{c})=\phi'\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c}). \qquad (A.2)$$

(A.2)式を使ったチェーン則より，

$$v''(\bar{c})=\frac{d^2\phi\big(u(\bar{c})\big)}{du(\bar{c})^2}u'(\bar{c})+\frac{d\phi\big(u(\bar{c})\big)}{du(\bar{c})}u''(\bar{c})=\phi''\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})+\phi'\big(u(\bar{c})\big)u''(\bar{c}).$$

上式と(A.2)式および，(A.3)式となる。

$$\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})}=\frac{\phi''\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})+\phi'\big(u(\bar{c})\big)u''(\bar{c})}{\phi'\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})}=-\phi\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})-A(\bar{c}). \qquad (A.3)$$

(A.1)式の２番目の等式のパラメータはすべて定数であり，$\bar{c}$の周りで一次の Talor 展開をすると(A.4)式となる。

$$\begin{aligned}\phi\big(u(\bar{c}-\delta)\big)&\approx\phi\big(u(\bar{c})\big)+\phi'\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})(\bar{c}-\delta-\bar{c})=\phi\big(u(\bar{c})\big)-\phi'\big(u(\bar{c})\big)u'(\bar{c})\delta\\&=v(\bar{c})-v'(\bar{c})\delta.\end{aligned} \qquad (A.4)$$

(A.1)式の最後の等号に$CE_{\Pi}\equiv c_{\Pi}-\rho_{\Pi}$（条件付き確実性等価消費水準）を代入すると，(A.5)式となる。

$$\mathrm{E}_{\Psi}[\phi(\mathrm{E}_{\Pi}[u(\tilde{c})])]=\mathrm{E}_{\Psi}[\phi(\mathrm{E}_{\Pi}[u(c_{\Pi}-\rho_{\Pi})])]=\mathrm{E}_{\Psi}\big[\phi\big(u(CE_{\Pi})\big)\big]=\mathrm{E}_{\Psi}[v(CE_{\Pi})]. \qquad (A.5)$$

ここでc_{Π}は，確率分布Πを条件として，$u(c)=\mathrm{E}_{\Pi}[u(\tilde{c})]$となる消費水準であり，確率的消費水準$\tilde{c}$の期待効用値が，ある消費水準（確定値）の効用値に等しい条件付き消費水準を表す。(A.5)式の右辺の関数vの二次の Talor 展開をすると(A.7)式となる。

$$\begin{aligned}\mathrm{E}_{\Psi}[v(CE_{\Pi})]&\approx v(\bar{c})+v'(\bar{c})\mathrm{E}_{\Psi}[CE_{\Pi}-\bar{c}]+\frac{1}{2}v''(\bar{c})\mathrm{E}_{\Psi}[(CE_{\Pi}-\bar{c})^2]\\&=v(\bar{c})-v'(\bar{c})(\mathrm{E}_{\Psi}[\rho_{\Pi}])+\frac{1}{2}v''(\bar{c})\breve{\sigma}^2.\end{aligned} \qquad (A.6)$$

ここで$\breve{\sigma}^2\equiv\mathrm{Var}_{\Psi}[CE_{\Pi}]$とする，(A.4)式と(A.6)式が等しいことから，

$$v(\bar{c})-v'(\bar{c})\delta=v(\bar{c})-v'(\bar{c})(\mathrm{E}_{\Psi}[\rho_{\Pi}])+\frac{1}{2}v''(\bar{c})\breve{\sigma}^2.$$

δについて解くと，

$$\delta=\mathrm{E}_{\Psi}[\rho_{\Pi}]+\frac{1}{2}\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})}\breve{\sigma}^2. \qquad (A.7)$$

(A.7)式の右辺第１項（リスク回避度）は Pratt の絶対リスク回避係数を参考に下式とする。

$$\hat{\rho}(\bar{c})\equiv\mathrm{E}_{\Psi}[\rho_{\Pi}(\bar{c})]\approx-\frac{1}{2}\mathrm{E}_{\Psi}\left[\frac{u''(\bar{c})}{u'(\bar{c})}\sigma_{\Pi}^2\right]=\frac{A_R(\bar{c})}{2}\hat{\sigma}^2>0.$$

ここで$\hat{\sigma}^2\equiv\mathrm{E}_{\Psi}[\sigma_{\Pi}^2]$。(A.8)式の右辺第２項（曖昧さ回避度）は下式となる。

$$\xi(\bar{c}) \equiv -\frac{1}{2}\frac{v''(\bar{c})}{v'(\bar{c})}\breve{\sigma}^2 = \frac{1}{2}\big(A_A(\phi)u'(\bar{c}) + A_R(\bar{c})\big)\mathrm{Var}_\Psi\left[c_\Pi - \frac{A_R(\bar{c})}{2}\sigma_\Pi^2\right] > 0.$$

ここで

$$\mathrm{Var}_\Psi\left[c_\Pi - \frac{A_R(\bar{c})}{2}\sigma_\Pi^2\right] = \mathrm{Var}_\Psi[c_\Pi] - \mathrm{Cov}_\Psi(c_\Pi, \sigma_\Pi^2)A_R(\bar{c}) + \frac{1}{4}\mathrm{Var}_\Psi[\sigma_\Pi^2]A_R(\bar{c})^2.$$

Q. E. D.

Appendix B

(11)式より効用関数別に考える。そこでは，$\bar{c} \geq 0$，$u'(\bar{c}) > 0$，$u''(\bar{c}) < 0$を前提とする。

１）ベキ型効用関数$\big(\beta > 0, \gamma \neq 0\big)$の場合，(11. 1)式と(11. 2)式より１階の導関数と２階の導関数を求める。

$$u_h' = \beta\Gamma(\bar{c})^{\gamma-1} > 0, \qquad u_h''(\bar{c}) = \frac{\beta}{1-\gamma}\Gamma(\bar{c})^{\gamma-2} < 0.$$

上式より絶対的リスク回避度$A_R(\bar{c})$を求め，$A_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。また相対的リスク回避度$R_R(\bar{c})$を求め，$R_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_R(\bar{c}) \equiv -\frac{u''(\bar{c})}{u'(\bar{c})} = \frac{\beta}{\Gamma(\bar{c})} > 0, \quad A_R'(\bar{c}) = -\frac{\beta^2}{(1-\gamma)\Gamma(\bar{c})^2}$$

$$R_R(\bar{c}) = \bar{c}A_R(\bar{c}) = \frac{\beta\bar{c}}{\Gamma(\bar{c})} > 0, \quad R_R'(\bar{c}) = \frac{\beta\eta}{\Gamma(\bar{c})^2}.$$

つまり，ベキ型効用関数で$\gamma < 1$ならばDARA（$A_R'(\bar{c}) < 0$）となる。また$\eta > 0$ならばIRRA（$R_R'(\bar{c}) > 0$）である。

2) 対数型効用関数$(\beta > 0)$の場合，(10)式より，１階の導関数と２階の導関数を求める。

$$u_l' = \frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta} > 0, \qquad u_e''(\bar{c}) = -\frac{\beta^2}{(\beta\bar{c}+\eta)^2} < 0.$$

$u_l' > 0$より$\beta\bar{c}+\eta > 0$を必要条件とし，$\beta, \eta > 0$を十分条件とする。上式より$A_R(\bar{c})$を求め，$A_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。また$R_R(\bar{c})$を求め，$R_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_R(\bar{c}) = \frac{\beta}{\beta\bar{c}+\eta}, \qquad A_R'(\bar{c}) = -\frac{\beta^2}{(\beta\bar{c}+\eta)^2} < 0 \quad \big(\beta > 0, \beta\bar{c}+\eta \neq 0\big)$$

$$R_R(\bar{c}) = \frac{\beta\bar{c}}{\beta\bar{c}+\eta}, \qquad R_R'(\bar{c}) = \frac{\beta\eta}{(\beta\bar{c}+\eta)^2} > 0.$$

つまり，$\eta > 0$のときDARA（$A_R'(\bar{c}) < 0$），IRRA（$R_R'(\bar{c}) > 0$）の必要十分条件は$\eta > 0$である。

3) 負の指数型効用関数$(\beta > 0)$の場合，(10)式より，１階の導関数と２階の導関数を求める。

$$u_e' = -\beta e^{-\beta\bar{c}} > 0, \qquad u_e''(\bar{c}) = -\beta^2 e^{-\beta\bar{c}} < 0.$$

上式より$A_R(\bar{c})$を求め，$A_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。また$R_R(\bar{c})$を求め，$R_R(\bar{c})$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_R(\bar{c}) = \beta, \qquad A_R'(\bar{c}) = 0.$$

$$R_R(\bar{c}) = \beta\bar{c}, \qquad R_R'(\bar{c}) = \beta > 0.$$

つまり，負の指数型効用関数ならばCARA（$A_R'(\bar{c}) = 0$），$\beta > 0$ならばIRRA（$R_R'(\bar{c}) > 0$）である。

Q. E. D.

Appendix C

(12.1)式と(12.2)式と(13)式より曖昧さ関数別に考える。そこでは，$\bar{c} \geq 0$，$\phi'\big(u(\bar{c})\big) > 0$，$\phi''\big(u(\bar{c})\big) < 0$を前提とする。

1) ベキ型曖昧さ関数$(\theta \neq 0)$を考える。(12.1)式より$\phi'\big(u(\bar{c})\big)$と$\phi''\big(u(\bar{c})\big)$を求める。

$$\phi'\big(u(\bar{c})\big) = u^{-\theta} > 0, \qquad \phi''\big(u(\bar{c})\big) = -\theta u^{-\theta-1} < 0.$$

上式の$\phi'\big(u(\bar{c})\big)$より$u(\bar{c}) > 0$を必要条件とし，$\phi''\big(u(\bar{c})\big)$より$\theta > 0$を必要条件とする。また$\bar{c} \geq 0$であるなら，$\eta > 1$が十分条件となる。上式より絶対的曖昧さ回避度$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。また相対的曖昧さ回避度$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_A\big(u(\bar{c})\big) \equiv -\frac{d^2\phi\big(u(\bar{c})\big)/du(\bar{c})^2}{d\phi\big(u(\bar{c})\big)/du(\bar{c})} = \frac{\theta}{u(\bar{c})} > 0, \quad A'_A\big(u(\bar{c})\big) = -\frac{\theta}{u(\bar{c})^2} < 0$$

$$R_A\big(u(\bar{c})\big) = u(\bar{c})A_A\big(u(\bar{c})\big) = \theta > 0, \qquad R'_A\big(u(\bar{c})\big) = 0$$

$\phi\big(u(\bar{c})\big), \phi'\big(u(\bar{c})\big) > 0$より$A'_A\big(u(\bar{c})\big) < 0$であるから，DAAA である。なお，IAAA と CAAA は前提条件$\phi''\big(u(\bar{c})\big) < 0$と矛盾する。$R'_A\big(u(\bar{c})\big) = 0$より CRAA のみである。

2) 対数型曖昧さ関数を考える。(12.2)式から$u(\bar{c}) > 0\ \forall\ \bar{c} \geq 0$が必要条件となる。$\phi'\big(u(\bar{c})\big)$と$\phi''\big(u(\bar{c})\big)$を求める。

$$\phi'\big(u(\bar{c})\big) = \frac{1}{u(\bar{c})} > 0, \qquad \phi''\big(u(\bar{c})\big) = -\frac{1}{u(\bar{c})^2} < 0.$$

上式より$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。また$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_A\big(u(\bar{c})\big) = \frac{1}{u(\bar{c})} > 0, \quad A'_A\big(u(\bar{c})\big) = -\frac{1}{u(\bar{c})^2} < 0,$$

$$R_A\big(u(\bar{c})\big) = 1, \qquad R'_A\big(u(\bar{c})\big) = 0.$$

$A'_A\big(u(\bar{c})\big) < 0$より DAAA であり，$R_A\big(u(\bar{c})\big) = 1$が成立するためには$u(\bar{c}) > 0$が必要であり，CRAA となる。

３）負の指数型曖昧さ関数$(\lambda > 0)$を考える。(13)式より$\phi'\big(u(\bar{c})\big)$と$\phi''\big(u(\bar{c})\big)$を求める。

$$\phi'\big(u(\bar{c})\big) = \lambda e^{-\lambda u} > 0, \qquad \phi''\big(u(\bar{c})\big) = -\lambda^2 e^{-\lambda u} < 0.$$

$\phi'\big(u(\bar{c})\big) > 0$と$\phi''\big(u(\bar{c})\big) < 0$を満たすには$\lambda > 0$が必要十分となる。上式より$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$A_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。また$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を求め，$R_A\big(u(\bar{c})\big)$を$\bar{c}$で微分する。

$$A_A\big(u(\bar{c})\big) = \lambda > 0, \quad A'_A\big(u(\bar{c})\big) = 0,$$

$$R_A\big(u(\bar{c})\big) = \lambda u(\bar{c}), \quad R'_A\big(u(\bar{c})\big) = \lambda u'(\bar{c}) > 0.$$

$A'_A\big(u(\bar{c})\big) = 0$より CAAA である。$R'_A\big(u(\bar{c})\big)$は$\lambda$，$u'(\bar{c}) > 0$であるので，IRAA である。

Appendix D

任意の$\bar{c}(\geq 0)$に関して，$\bar{c} \to \infty$のとき，ベキ型・指数型効用関数の場合

$$\lim_{\bar{c}\to\infty}\Big(u(\bar{c}) - \phi\big(u(\bar{c})\big)\Big) = +\infty.$$

である。また$\bar{c}$と曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$の関係は以下のようになる。

$$\lim_{\bar{c}\to\infty} \xi(\bar{c}) = 0.$$

任意の$\bar{c}(\geq 0)$に関して，負の指数型効用関数のケースを考える。さらに(12.1)式のベキ型曖昧さ関数の場合，

$$\lim_{\bar{c}\to\infty}\left(u(\bar{c}) - \phi\left(u(\bar{c})\right)\right) = -\left\{\zeta + \frac{(-\zeta)^{1-\theta}}{1-\theta}\right\} > 0,\ \left(\theta > 0,\ \zeta < -1\right).$$

であり，(12.2)式の対数型曖昧さ関数の場合，

$$\lim_{\bar{c}\to\infty}\left(u(\bar{c}) - \phi\left(u(\bar{c})\right)\right) = -\{\zeta + ln(-\zeta)\} > 0,\ (\zeta < -1).$$

であり，(13)式の負の指数型曖昧さ関数の場合，

$$\lim_{\bar{c}\to\infty}\left(u(\bar{c}) - \phi\left(u(\bar{c})\right)\right) = -\zeta + \varepsilon \lesseqqgtr 0,\ \left(\zeta \gtreqqless \varepsilon,\ \zeta < -1\right).$$

また$\bar{c}$と曖昧さプレミアム$\xi(\bar{c})$の関係は以下のようになる。

$$\lim_{\bar{c}\to\infty} \xi(\bar{c}) = \frac{\beta}{2}\left(\mathrm{Var}_{\Psi}[c_{\Pi}] + \frac{\beta}{\zeta}\mathrm{Cov}_{\Psi}[c_{\Pi}, \sigma_{\Pi}^2] + \frac{\beta^2}{4\zeta^2}\mathrm{Var}_{\Psi}[\sigma_{\Pi}^2]\right) > 0.$$

である。

追記

Kinght (1921) に関する不確実性の問題提起から，百有余年が過ぎ，不確実性の新たな考え方が現れた。筆者の大学教員としての研究生活も残すところ 1 年余りとなり，不確実性をともなう効用理論の新たな時代に出会えたことは感慨深い。筆者はこの不確実性に関する理論がこれからの時代の主流となると期待したい。この論文を含め，今後刊行する一連の論文はこうした主流と期待する効用理論の一助となれば幸いである。最後に本論文を執筆するにあたり，数多くの参考論文の収集に携わってくださった図書館の松田さんと白木さんに感謝いたします。