The Journal of Gifu Keizai University, Vol. 33, No. 3 (1999)

Géometrie des variétés de Nambu-Poisson

par

Nobutada NAKANISHI

à la mémoire de

Professeur Masakazu ICHIYANAGI

1. INTRODUCTION

En 1973 Nambu [14] a proposé une généralisation de la mécanique hamiltonienne classique tenant compte du théorème de Liouville comme un principe central. À la suite de l'étude de Nambu, quelques articles sont apparus pour analyser sa proposition. Par exemple la mécanique de Nambu a été traitée comme un système hamiltonien dégénéré avec quelques contraintes (cf. [1], [11]). De plus, dans [6] et [7], I. Cohen et A. J. Kálnay ont étudié les transformations canoniques de Nambu. Mais ces articles traitaient les aspects physiques, et n'utilisaient que le tenseur de Nambu-Poisson le plus simple : $\eta = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$ sur R^n, que nous appellerons *le tenseur de Nambu-Poisson standard*.

En 1994 L. Takhtajan [15] a fait une formulation géométrique du crochet de Nambu-Poisson. Pour lui, le crochet doit remplir les trois conditions suivantes : antisymétricité, la règle de Leibniz et Identité Fondamentale.

R. Chatterjee et L. Takhtajan [3] ont conjecturé que chaque tenseur de Nambu-Poisson définissant le crochet de Nambu-Poisson serait décomposable. Cette conjecture a été affirmativement résolue dans [9], [12]. Dans [2], R. Chatterjee a démontré que quelques systèmes physiques (l'opérateur harmonique $SU(n)$-isotropique et le système $SO(4)$-Keplerien) admettent des structures de Nambu-Poisson. D'autres exemples sont discutés dans [15].

Parmi les nombreuse autres recherches sur les variétés de Nambu-Poisson, notons les suivantes. J-P. Dufour et N.T. Zung [8] ont classifié *les structures de Nambu-Poisson linéaires* et ils ont résolu le problème de la linéairisabilité des tenseurs de Nambu-Poisson. I. Vaisman [16] a proposé une définition des groupes de Nambu-Lie comme étant une extension de la notion des groupes de Poisson-Lie. Comme le produit direct de deux variétés de Nambu-Poisson n'est plus une variété de Nambu-Poisson, la définition de la structure de Nambu-Lie doit être altérée. J. Grabowski et G. Marmo [10] ont étudié les relations entre les structures de Nambu-Poisson linéaires et les algèbres de Filippov, et ils ont défini les algèbroids de Filippov.

Le but de cet article est de donner une vue d'ensemble de la géométrie des variétés de Nambu-Poisson. Le plan de cet article est comme suit : La Section 2 introduit l'article de Nambu. Dans la Section 3, nous définissons la notion des variété de Nambu-Poisson d'après Takhtajan [15]. Une des variétés de Nambu-Poisson est une paire d'une variété de C^∞ et un tenseur de Nambu-Poisson. Nous démontrons, d'abord, le théorème de la structure locale des tenseurs de Nambu-Poisson. Puis en utilisant ce théorème, nous pouvons démontrer quelques propriétés fondamentales sur les variétés de Nambu-Poisson. D'autre part nous réécrivons les tenseurs de Nambu-Poisson dans la forme différentielle. Ceci nous permet de déterminer plus simplement si les tenseurs donnés sont ceux de Nambu-Poisson ou non. Dans la Section 4, nous considérons les tenseurs de Nambu-Poisson invariants à gauche sur les groupes de Lie, et nous examinons les conditions sous lesquelles ils peuvent être projetés aux espaces homogènes [13].

En terminant cette introduction, je tiens à remercier le Professeur M. Ichiyanagi, qui m'a communiqué la notion des variétés de Nambu-Poisson.

2. Le travail original de Nambu

Dans [14], Nambu a proposé une généralisation possible de la mécanique hamiltonienne classique à l'espace de phase de dimension trois. Soit $(x,y,z) \equiv \vec{r}$ un triplet des variables dynamiques qui engendre l'espace de phase de dimension trois R^3. Ensuite soient $R, S \in C^\infty(R^3)$ deux fonctions qui sont applées une paire des *hamiltoniens* pour déterminer les équations du mouvement dans R^3. Plus précisément, Nambu postule les *équations hamiltoniennes* suivantes :

$$\frac{dx}{dt} = \frac{\partial(R,S)}{\partial(y,z)}, \quad \frac{dy}{dt} = \frac{\partial(R,S)}{\partial(z,x)}, \quad \frac{dz}{dt} = \frac{\partial(R,S)}{\partial(x,y)}, \tag{2.1}$$

ou dans la notation vectorielle,

$$\frac{d\vec{r}}{dt} = \nabla R \times \nabla S. \tag{2.2}$$

Pour toute fonction $F \in C^\infty(R^3)$, l'on a sous la supposition (2.1),

$$\frac{dF}{dt} = \frac{\partial F}{\partial x}\frac{dx}{dt} + \frac{\partial F}{\partial y}\frac{dy}{dt} + \frac{\partial F}{\partial z}\frac{dz}{dt} = \nabla F \cdot (\nabla R \times \nabla S). \tag{2.3}$$

La droite de (2.3) est désignée par $\{F, R, S\}$. Ce *crochet de Poisson généralisé* ne remplit pas l'identité de Jacobi. Dans notre terminologie, ce crochet est appelé *le crochet de Nambu-Poisson*, et *le tenseur de Nambu-Poisson* lui correspondant est $\frac{\partial}{\partial x} \wedge \frac{\partial}{\partial y} \wedge \frac{\partial}{\partial z}$. R et S sont les constantes du mouvement. Notons que le champ de vélocités $\frac{d\vec{r}}{dt}$ est sans divergence :

$$\nabla \cdot (\nabla R \times \nabla S) = 0, \tag{2.4}$$

et cette équation montre que le théorème de Liouville est encore maintenu dans l'espace de phase de Nambu. Cela signifie que si nous considérons $\nabla R \times \nabla S$ comme le *champ de vecteurs hamiltoniens* correspondant aux hamiltoniens R et S, il laisse l'élément de volume standard de R^3 invariant.

Considérons les mouvements d'un corps rigide autour d'un point stationnaire 0. Soit $\vec{M} = (M_x, M_y, M_z)$ le vecteur de moment angulaire du corps, $\vec{V}$ le vecteur de vélocité angulaire dans le corps. Alors *l'équation d'Euler* est définie par

$$\frac{d\vec{M}}{dt} = \vec{M} \times \vec{V}. \tag{2.5}$$

Posons $R = \frac{1}{2}(M_x^2 + M_y^2 + M_z^2)$. Alors nous avons $\nabla R = \vec{M}$. Posons $S = \frac{1}{2}(M_x^2/I_x + M_y^2/I_y + M_z^2/I_z)$, où $I = (I_x, I_y, I_z)$ désigne l'opérateur d'inertie. Dans ce cas, $\vec{V}$ est donné par ∇S. Par conséquent, l'équation (2.5) est écrite comme suit:

$$\frac{dM_x}{dt} = M_x M_y \left(\frac{1}{I_z} - \frac{1}{I_y}\right) = \frac{\partial(R,S)}{\partial(M_y, M_z)}, \tag{2.6}$$

$$\frac{dM_y}{dt} = M_z M_x \left(\frac{1}{I_x} - \frac{1}{I_z}\right) = \frac{\partial(R,S)}{\partial(M_z, M_x)}, \tag{2.7}$$

$$\frac{dM_z}{dt} = M_x M_y \left(\frac{1}{I_y} - \frac{1}{I_x}\right) = \frac{\partial(R,S)}{\partial(M_x, M_y)}. \tag{2.8}$$

Ces équations sont équivalentes à léquation (2.1). Donc l'équation du mouvement d'Euler d'un corps rigide donne un exemple typique du système physique dans le schéma de Nambu.

3. Varietes de Nambu-Poisson

Dans cette section nous donnons la définition des variétés de Nambu-Poisson, qui est équivalente à celle de Takhtajan [15]. Soit M une variété de C^∞ de dimension m, et $\mathcal{F}$ son algèbre de fonctions réelles de C^∞. Nous désignons par $\Gamma(\Lambda^n TM)$ l'espace de sections globales $\eta : M \longrightarrow \Lambda^n TM$. Alors pour chaque $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TM)$, il correspond au crochet défini par

$$\{f_1, \dots, f_n\} = \eta\ (df_1, \dots, df_n), \quad f_1, \dots, f_n \in \mathcal{F}.$$

Soit $A = \sum f_{i_1} \wedge \cdots \wedge f_{i_{n-1}}, f_{i_j} \in \mathcal{F}$. Puisque le crochet remplit clairement la règle de Leibniz, nous pouvons définir un champ de vecteurs X_A correspondant à A par l'équation suivante :

$$X_A(g) = \sum \{f_{i_1}, \ldots, f_{i_{n-1}}, g\}, \quad g \in \mathcal{F}.$$

Un tel champ de vecteurs est appelé *un champ de vecteurs hamiltoniens*. L'espace des champs de vecteurs hamiltoniens est désigné par $\mathcal{H}$.

Définition 3.1. *$\eta \in \Gamma(\Lambda^n TM)$ est appelé un tenseur de Nambu-Poisson d'ordre n s'il vérifie $\mathcal{L}(X_A)\eta = 0$ pour $X_A \in \mathcal{H}$, où $\mathcal{L}$ est l'opérateur de dérivation de Lie. Maintenant une variété de Nambu-Poisson est une paire (M, η).*

La définition ci-dessus est équivalente à *Identité Fondamentale*, que Takhtajan a proposé dans [15]. Si $n = 2$, Identité Fondamentale n'est pas autre chose que l'identité de Jacobi, et nous obtenons les variétés de Poisson usuelles.

Un point $p \in M$ est dit *régulier* si $\eta(p) \neq 0$. Nous pouvons expliquer le théorème de la structure locale pour les tenseurs de Nambu-Poisson [9], [12].

Théorème 3.2. *Soit $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TM)$, $n \geq 3$. Si η est un tenseur de Nambu-Poisson d'ordre n, alors pour chaque point régulier p, il existe un voisinage U avec des cartes locales $(x_1, \ldots, x_n, x_{n+1}, \ldots, x_m)$ autour de p tel que*

$$\eta = \frac{\partial}{\partial x_1} \wedge \cdots \wedge \frac{\partial}{\partial x_n}$$

sur U, et vice versa.

Dans le Théorème 3.2, la condition $n \geq 3$ est essentielle. Si $n = 2$, comme il est bien connu, A. Weinstein [17] a démontré le théorème de décomposition pour tenseurs de Poisson. Comparant le théorème de décomposition de Weinstein avec notre théorème, nous savons que la structure locale des variétés de Nambu-Poisson est plus rigide que celle des variétés de Poisson usuelles. Quelques applications immédiates du Théorème 3.2 sont les suivantes.

Corollaire 3.3. (1) *Soit η un tenseur de Nambu-Poisson d'ordre $n \geq 3$. Si f est une fonction de C^∞, alors $f\eta$ est encore un tenseur de Nambu-Poisson.*

(2) *Si $m = n \geq 3$, chaque $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TM)$ est un tenseur de Nambu-Poisson.*

(3) *Pour chaque tenseur de Nambu-Poisson* η, *son crochet de Schouten vérifie* $[\eta,\eta] = 0$.

D'après le corollaire ci-dessus, l'on sait que 3-tensor sur R^3 correspondant au crochet de Poisson généralisé de Nambu est celui de Nambu-Poisson. On peut trouver l'autre critère dans la section suivante.

Soit (M,η) une variété de Nambu-Poisson avec la forme volume Ω, et $m \geq n \geq 3$. Posons $\omega = i(\eta)\Omega$, où le second membre est le produit intérieur de η et Ω. Donc ω est $(m-n)$-forme. Dans le théorème suivant, nous caractériserons un tenseur de Nambu-Poisson en utilisant cette forme différentielle ω [13].

Théorème 3.4. *Soit* $\eta \in \Gamma(\Lambda^n TM)$. *Alors* η *est un tenseur de Nambu-Poisson si et seulement si* η *vérifie les deux conditions suivantes autour de chaque point régulier:*

(1) ω *est (localement) décomposable, et*

(2) *il existe une 1-forme* θ *localement définie telle que* $d\omega = \theta \wedge \omega$.

Remarque. Il est clair que le critère ci-dessus pour tenseurs de Nambu-Poisson ne dépend pas du choix de la forme volume. Une forme différentielle ω qui vérifie les conditions dans le Théorème 3.4 est appelée une *forme de Nambu-Poisson.*

Corollaire 3.5. *Si* $m = n + 1$, *alors* η *est un tenseur de Nambu-Poisson si et seulement si* $\omega \wedge d\omega = 0$.

4. Tenseurs de Nambu-Poisson invariants a gauche sur les groupes de Lie

Soit G un groupe de Lie connexe de dimension m, $m \geq 3$. D'abord nous déterminerons la forme de tenseurs de Nambu-Poisson invariants à gauche sur G. Désignons par $\mathfrak{g}$ l'algèbre de Lie des champs de vecteurs invariants à gauche sur G. En utilisant le Théorème 3. 2, nous pouvons facilement obtenir le lemme suivant.

Lemme 4.1. *Soit η un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche d'ordre $n \geq 3$ sur un groupe de Lie G. Alors η est globalement décomposable.*

D'après le Lemme 4.1, tous les tenseurs de Nambu-Poisson invariants à gauche η d'ordre n sont écrits comme éléments décomposables de $\Lambda^n \mathfrak{g}$.

Nous désignons par $< X_1, \cdots, X_n >$ une sous-algèbre de Lie générée par $X_1, \cdots, X_n \in \mathfrak{g}$. Le théorème exprime que pour chaque sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$, $\dim \mathfrak{h} \geq 3$, il correspond un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche d'ordre $\dim \mathfrak{h}$ [13].

Théorème 4.2. *Soit G un groupe de Lie de dimension m.*

(i) *Soit $\mathfrak{h} = < X_1, \cdots, X_n >$ une sous-algèbre de Lie de dimension n de $\mathfrak{g}$, $n \geq 3$. Pour une base $X_1, \cdots, X_n$ de $\mathfrak{h}$, posons $\eta = X_1 \wedge \cdots \wedge X_n$. Alors η est un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche d'ordre n sur G.*

(ii) *Au contraire étant donné un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche $\eta = X_1 \wedge \cdots \wedge X_n \in \Lambda^n \mathfrak{g}$ sur G, alors $\mathfrak{h} = < X_1, \cdots, X_n >$ est une sous-algèbre de Lie de dimension n de $\mathfrak{g}$.*

Si un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche η a deux expressions : $\eta = X_1 \wedge \cdots \wedge X_n = Y_1 \wedge \cdots \wedge Y_n$, nous savons que $< X_1, \cdots, X_n > = < Y_1, \cdots, Y_n >$. Par conséquent l'on a

Corollaire 4.3. *Il y a une correspondance univalente à multiple constant près entre l'ensemble de n-tenseurs de Nambu-Poisson invariants à gauche sur G et celui de sous-algèbres de Lie de dimension n de $\mathfrak{g}$.*

Soit G un groupe de Lie connexe de dimension m et H un sous-groupe fermé de G de dimension n. Désignons par $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}$ les algèbres de Lie de G et H respectivement. Soit $\pi : G \longrightarrow G/H$ la projection naturelle. L'application $\bar{\omega} \longrightarrow \pi^*\bar{\omega}$ établit une correspondance univalente entre les p-formes G-invariantes sur G/H et les p-formes ω invariantes à gauche sur G qui vérifient

(a) $i(X)\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$,

(b) $\mathcal{L}(X)\omega = 0$ pour tout $X \in \mathfrak{h}$ [5].

Si $\bar{\omega}$ est une $(m-n)$-forme G-invariante (i.e. une forme volume G-invariante) sur G/H, alors $\omega = \pi^*\bar{\omega}$ est une $(m-n)$-forme invariante à gauche sur G. Puisque ω est fermée et décomposable, ω induit un n-tenseur de Nambu-Poisson η

invariant à gauche sur G par l'équation $i(\eta)\Omega = \omega$. Il est clair que η est égal au tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche correspondant à l'algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de H à multiple constant près. Définissons $\mathfrak{h}_\omega = \{X \in \mathfrak{g} \mid i(X)\omega = 0\}$. Alors $\mathfrak{h}_\omega$ est une sous-algèbre de $\mathfrak{g}$ et $\mathfrak{h}_\omega = \mathfrak{h}$. La sous-variété intégrale maximale H_ω passant par e est le composant identité de H. Comme H est fermé, H_ω est aussi un sous-groupe fermé de G.

Au contraire, donnons un n-tenseur de Nambu-Poisson η invariant à gauche, où $n \geq 3$. Alors comme nous avons vu dans le Theorem 4.2, η détermine la sous-algèbre de Lie $\mathfrak{h}$ de dimension n, et η induit aussi la $(m - n)$-forme ω invariante à gauche sur G par $i(\eta)\Omega = \omega$. Dans la proposition suivante, nous donnons une condition suffisante pour que ω soit projetée sur la forme volume G-invariante de G/H. Cela essentiellement dépend de S.S. Chern [4].

Proposition 4.4. *Soit G un groupe de Lie connexe unimodulaire de dimension m, et η un tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche d'ordre $n \geq 3$ sur G. Alors il correspond une sous-algèbre $\mathfrak{h}$ de dimension n. Désignons par H le sous-groupe de Lie connexe correspondant à $\mathfrak{h}$. Si H est fermé et unimodulaire, alors ω est projetée sur la forme volume G-invariante de G/H.*

L'autre condition suffisante facile pour que ω soit projectable est la suivante. Si $\mathfrak{h}$ est un idéal de $\mathfrak{g}$, alors $ad(X)$ est une application de $\mathfrak{g}$ dans $\mathfrak{h}$ pour $X \in \mathfrak{h}$, et nous obtenons facilement que $d\omega = 0$. Nous avons établi

Proposition 4.5. *Soit η un n-tenseur de Nambu-Poisson invariant à gauche sur G. Supposons que $\mathfrak{h}$ induit par η est un idéal de $\mathfrak{g}$ et le groupe de Lie connexe H qui correspond à $\mathfrak{h}$ est un sous-groupe fermé de G. Alors ω est projetée sur la forme volume G-invariante de G/H.*

Nous donnons ici un exemple de la paire de groupes de Lie (G, H) tel que ω n'est projetée à aucune forme volume G-invariante de G/H. Dans ce cas, bien sûr, H n'est pas unimodulaire. Soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{sl}(3, R)$ et soit $\mathfrak{g} = \mathfrak{a} + \mathfrak{n} + \mathfrak{k}$ la décomposition d'Iwasawa usuelle. On prend $\mathfrak{a} + \mathfrak{n}$ comme $\mathfrak{h}$. Alors $\mathfrak{h}$ n'est pas un idéal mais une sous-algèbre de Lie de $\mathfrak{g}$. Soient A et N les groupes de Lie connexes correspondant à $\mathfrak{a}$ et $\mathfrak{n}$ respectivement. Alors A et N sont des sous-groupes de Lie fermés de $SL(3, R)$, et H est difféomorphique à $A \times N$. Donc H est un sous-groupe fermé de $SL(3, R)$. Maintenant on peut trouver une base $< X_1, \cdots, X_8 >$ de $\mathfrak{g}$ telle que $\mathfrak{a} = < X_1, X_2 >$ et $\mathfrak{n} = < X_3, X_4, X_5 >$. Posons $\eta = X_1 \wedge \cdots \wedge X_5$. Alors $\omega = i(\eta)\Omega$ s'écrit comme $\omega = \omega_6 \wedge \omega_7 \wedge \omega_8$ en ce qui concerne la base duale $< \omega_1, \cdots, \omega_8 >$ de $< X_1, \cdots, X_8 >$. Et on sait que $i(\mathfrak{h})d\omega \neq 0$. Par conséquent ω n'est projetée sur aucune forme G-invariante de G/H.

REFERENCES

1. F. Bayen et M. Flato, *Remarks concerning Nambu's generalized mechanics*, Phys. Rev. **D11** (1975), 3049–3053.

2. R. Chatterjee, *Dynamical symmetries and Nambu mechanics*, Lett. Math. Phys. **36** (1996), 117–126.

3. R. Chatterjee et L. Takhtajan, *Aspects of classical and quantum Nambu mechanics*, Lett. Math. Phys. **37** (1996), 475–482.

4. S. S. Chern, *On integral geometry in Klein spaces*, Ann. of Math. **43** (1942), 178–189.

5. C. Chevalley et S. Eilenberg, *Cohomology theory of Lie groups and Lie algebras*, Trans. Amer. Math. Soc. **63** (1948), 85–124.

6. I. Cohen et A. J. Kálnay, *On Nambu's generalized Hamiltonian mechanics*, Int. J. Theor. Phys. **12** (1975), 61–67.

7. I. Cohen, *Generalization of Nambu's mechanics*, Int. J. Theor. Phys. **12** (1975), 69–78.

8. J-P. Dufour et N. T. Zung, *Linearization of Nambu structures*, (à apparaître) (1997).

9. P. Gautheron, *Some remarks concerning Nambu mechanics*, Lett. Math. Phys. **37** (1996), 103–116.

10. J. Grabowski et G. Marmo, *Filippov, Nambu-Poisson and Nambu-Jacobi brackets*, (à apparaître) (1998).

11. N. Mukunda et E. Sudarshan, *Relation between Nambu and Hamiltonian mechanics*, Phys. Rev. **D13** (1976), 2846–2850.

12. N. Nakanishi, *On Nambu-Poisson manifolds*, Rev. in Math. Phys. **10** (1998), 499–510.

13. N. Nakanishi, *Nambu-Poisson tensors on Lie groups*, (à apparaître) (1999).

14. Y. Nambu, *Generalized Hamiltonian mechanics*, Phys. Rev. **D7** (1973), 2405–2412.

15. L. Takhatajan, *On foundation of the generalized Nambu mechanics*, Commun. Math. Phys. **160** (1994), 295–315.

16. I. Vaisman, *Nambu-Lie groups*, (à apparaître) (1998).

17. A. Weinstein, *The local structure of Poisson manifolds*, J. Diff. Geom. **18** (1983), 523–557.

5-50 Kitagata, Ogaki, Gifu, 503-8550, Japon
E-mail address : nakanisi@gifu-keizai.ac.jp