岐阜経済大学論集 40 巻 2 号（2007 年）

最適ポートフォリオ選択問題

――リスク最小化問題と指数型期待効用極大化問題の融合――

中川　裕　司

1. はじめに

もっとも簡単なポートフォリオ問題を考えるとき，これまでは多資産から構成されるポートフォリオの収益率の分散（ボラティィリティの 2 乗）の最小化問題と 2 期間の期末富の期待効用極大化問題との各々の問題と考えられてきている。これらを融合する方法として，ポートフォリオを構成する資産の収益率が多変量正規分布（多変量ガウス分布）に従うと仮定することによって，ポートフォリオの収益率の分散の最小化問題は，2 期間の期末富の期待効用極大化問題として解法することができる，と論ずるのみであった。また，もう一歩踏み込んで，同時に両問題を解決する方法として，数値例を使

用するか，あるいは図示するのみであった。しかし，数値例だけでは，両問題の最適解が有する特徴は明らかにできない。

そこで，本稿では，無危険利子率で貸出し借入れ可能なケース，言い換えれば空売り可能なケースで，多資産から構成されるポートフォリオの収益率の分散の最小化問題の下で，2 期間の期末富の期待効用極大化問題から得られる最適ポートフォリオ（最適解）を求める。そのとき，危険資産のみから構成されるケースと無危険資産を含むケースを考え，両ケースを比較する。

2. HARA 型効用関数

絶対的危険回避（Hyperbolic Absolute Risk Aversion）型効用関数（以下では「HARA 型効用関数」とよぶ）は(2.1)式のように，富の線形関係で表される。

$$-\frac{u''(W)}{u'(W)}=aW+b \tag{2.1}$$

ここで，W は富，$u(W)$ は W の効用関数，$u'(W)$ は W の一次導関数，$u''(W)$ は W の二次導関数，a と b は正のパラメータを表す。このとき，(2.1)式を満足する効用関数は(2.2)式となる[1)]。

$$u(W)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left\{\left(\frac{\beta W}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}+\varsigma\right\} \tag{2.2a}$$

$$\beta>0 \tag{2.2b}$$

ここで，(2.2a)式の右辺のギリシャ文字はパラメータを表し，危険回避パラメータ β については，(2.2b)式を仮定する。また，極限処理を行うことによって，HARA 型効用関数は $\gamma\neq 0,1$ かつ $-\infty<\gamma<\infty$ のときにはベキ型効用関数となり[2)]，$\eta=1$ かつ $\gamma\rightarrow\pm\infty$ のときには(2.3)式の指数型効用関

数となり[3]，$\varsigma=-1$ かつ $\gamma\to 0$ のときには対数型効用関数となり，$\beta W+\eta>0$ を仮定する[4]。

$$u_e(W)\equiv\lim_{\gamma\to\pm\infty}\left[u(W)\Big|_{\eta=1}\right]=-\left(e^{-\beta W}+\varsigma\right)\qquad(\beta>0)\tag{2.3}$$

つぎに，HARA 型効用関数から，HARA 型期待効用関数を考える。そこで，2 期間の期末富 $\widetilde{W}$ が正規分布に従うと仮定する。そのとき，期待効用を求めるとき，指数型効用関数の場合に限り，(2.4)式のように，1 次と 2 次のモーメントで表現できる。

$$\begin{aligned}E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\right]&\equiv-\int_{-\infty}^{\infty}\left(e^{\beta\widetilde{W}}+\varsigma\right)\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma_W}\exp\left\{-\frac{\left(\widetilde{W}-E\left[\widetilde{W}\right]\right)^2}{2\sigma_{WW}}\right\}dW\\&=-\exp\left\{-\beta\left(E\left[\widetilde{W}\right]-\frac{\beta\sigma_{WW}}{2}\right)\right\}+\varsigma\end{aligned}\tag{2.4}$$

ここで，σ_W は $\widetilde{W}$ の標準偏差（ボラティィリティ），σ_{WW} は $\widetilde{W}$ の分散，$E[\cdot]$ は期待値を表す。

3. n 種類の危険資産からなるポートフォリオ

n 種類の危険資産からなるポートフォリオの収益率 $\tilde{r}_p$ は，(3.1)式となる。

$$\tilde{r}_p=\mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{r}}\tag{3.1}$$

ここで，$\mathbf{x}$ は n 種類の危険資産への投資割合の列ベクトル，$\tilde{\mathbf{r}}$ は n 種類の危険資産の収益率の列ベクトルを表す。(3.1)式の両辺の期待値をとって，ポートフォリオの期待収益率 μ_p を求めると，(3.2)式となる。

$$\mu_p=\mathbf{x}^T\mathbf{e}\tag{3.2}$$

ここで，$\mathbf{e}$ は n 種類の危険資産の期待収益率の列ベクトルを表す。また，$\mathbf{x}$ の各要素の合計は1になるので，(3.3)式が成立する。ここで，$\mathbf{1}$ は1の列ベクトルを表す。

$$1 = \mathbf{x}^T\mathbf{1} \tag{3.3}$$

つぎに，(3.4b)式のように，W_0 を正の期首の富とすると，期末富 $\widetilde{W}$ は(3.4a)式となる。

$$\widetilde{W} = \left(1 + \tilde{r}_p\right)W_0 = \left(1 + \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{r}}\right)W_0 \tag{3.4a}$$

$$W_0 > 0 \tag{3.4b}$$

ここで，期末富 $\widetilde{W}$ が正規分布に従うと仮定するとき，期末富 $\widetilde{W}$ は危険資産の収益率の凸線形結合であるので，危険資産の収益率が多変量正規分布に従うことと整合的である。(3.4)式より，期末富の期待値 $E[\widetilde{W}]$ と期末富の分散 σ_{WW} を各危険資産の期待収益率と危険資産の収益率の分散共分散で表すと(3.5)式と(3.6)式となる。

$$E\left[\widetilde{W}\right] = \left(1 + \mu_p\right)W_0 = \left(1 + \mathbf{x}^T\mathbf{e}\right)W_0 \tag{3.5}$$

$$\sigma_{WW} = W_0^2\sigma_{pp} = W_0^2\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x} \tag{3.6}$$

ここで，σ_{pp} は n 種類の危険資産からなるポートフォリオの分散，$\mathbf{V}_n$ は危険資産の $n \times n$ 分散共分散行列を表す。

危険資産の収益率が多変量正規分布に従うときの指数型期待効用関数は，(3.5)式と(3.6)式を(2.4)式に代入することにより，(3.7)式となる。

$$\begin{aligned} E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\right] &= -\exp\left\{-\beta W_0\left(1 + \mu_p - \frac{\beta W_0\sigma_{pp}}{2}\right)\right\} + \varsigma \\ &= -\exp\left\{-\beta W_0\left(1 + \mathbf{x}^T\mathbf{e} - \frac{\beta W_0}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x}\right)\right\} + \varsigma \end{aligned} \tag{3.7}$$

4. n 種類の危険資産の効率的フロンティア

n 種類の危険資産から構成されるポートフォリオの収益率の分散の最小化問題の下で，2期間の期末富の期待効用極大化問題から得られる最適ポートフォリオを求める。

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\right] = -\exp\left\{-\beta W_0\left(1+\mathbf{x}^T\mathbf{e}-\frac{\beta W_0}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x}\right)\right\}+\varsigma \quad (4.1)$$

subject to

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x} \quad (4.2)$$

$$\mu_p = \mathbf{x}^T\mathbf{e} \quad (3.2)$$

$$1 = \mathbf{x}^T\mathbf{1} \quad (3.3)$$

ここで，(4.1)式が期待効用極大化問題であり，(4.2)式と(3.2)式と(3.3)式がポートフォリオの収益率の分散の最小化問題としての定式である。

そこで，まず Hung and Litzenberger [2] を参考にして，ポートフォリオの収益率の分散の最小化問題を解くことにする。ラグランジュ乗数を λ_1 と λ_2，ラグランジュ式を L とすると，(4.2)式と(3.2)式と(3.3)式を(4.3)式に書き直すことができる。

$$\min_{\{\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2\}} L = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x}+\lambda_1\left(\mu_p-\mathbf{x}^T\mathbf{e}\right)+\lambda_2\left(1-\mathbf{x}^T\mathbf{1}\right) \quad (4.3)$$

(4.3)式を $\mathbf{x}$ と λ_1 と λ_2 でそれぞれ偏微分してゼロと置いて，$\mathbf{x}$ の最適値を $\mathbf{x}^*$，λ_1 の最適値を λ_1^*，λ_2 の最適値を λ_2^* とした1階条件は(4.4)式となり，最適値 $\mathbf{x}^*$ を(3.2)式に代入したポートフォリオの期待収益率を μ_p^* とする。

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda_1=\lambda_1^*,\lambda_2=\lambda_2^*} = \mathbf{V}_n\mathbf{x}^* - \lambda_1^*\mathbf{e} - \lambda_2^*\mathbf{1} = \mathbf{0} \tag{4.4a}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_1}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda_1=\lambda_1^*,\lambda_2=\lambda_2^*} = \mu_p^* - \left(\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{e} = 0 \tag{4.4b}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda_2}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda_1=\lambda_1^*,\lambda_2=\lambda_2^*} = 1 - \left(\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{1} = 0 \tag{4.4c}$$

ここで，$\mathbf{0}$ はゼロの列ベクトルを表す。$\mathbf{V}_n$ は $n \times n$ 正値定符号行列であり，1 階条件は広域的最適値のための必要十分条件でもある[5)]。(4.4a)式から $\mathbf{x}^*$ を解くと，(4.5)式となる。

$$\mathbf{x}^* = \lambda_1^*\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right) + \lambda_2^*\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right) \tag{4.5}$$

$\mathbf{e}^T$ を(4.5)式の両辺に左側から掛けて，(4.4b)式を使うと，(4.6)式となる。

$$\mu_p^* = \lambda_1^*\left(\mathbf{e}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right) + \lambda_2^*\left(\mathbf{e}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right) = \lambda_1^* B + \lambda_2^* A \tag{4.6}$$

ここで，$\mathbf{1}^T$ を(4.5)式の両辺に左側から掛けて，(4.4c)式を使うと，(4.7)式となる。

$$1 = \lambda_1^*\left(\mathbf{1}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right) + \lambda_2^*\left(\mathbf{1}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right) = \lambda_1^* A + \lambda_2^* C \tag{4.7}$$

また，

$$\begin{aligned} A &\equiv \mathbf{e}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1} = \mathbf{1}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}, \qquad & B &\equiv \mathbf{e}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e} > 0 \\ C &\equiv \mathbf{1}^T\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1} > 0, & D &\equiv BC - A^2 > 0 \end{aligned} \tag{4.8}$$

である。(4.6)式と(4.7)式より，

$$\lambda_1^* = \frac{C\mu_p^* - A}{D}, \qquad \lambda_2^* = \frac{B - A\mu_p^*}{D} \tag{4.9}$$

(4.9)式を(4.5)式に代入すると，ポートフォリオの収益率の分散を最小にする危険資産への投資割合 $\mathbf{x}^*$ は(4.10)式となる。

$$\mathbf{x}^* = \frac{C\mu_p^* - A}{D}\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right) + \frac{B - A\mu_p^*}{D}\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right) \tag{4.10}$$

ここで，(3.2)式と(4.10)式より，μ_p は内生変数であり，任意の値を一つ与えることによって，$\mathbf{x}^*$が一意に決定されることを意味する。したがって，最適ポートフォリオは(4.10)式からだけでは得られないことに注意すべきである。

つぎに，ポートフォリオの収益率の分散 σ_{pp} を(4.10)式から求める。危険資産の分散共分散行列 $\mathbf{V}_n$ の左右に，(4.10)式の $\mathbf{x}^*$ を掛けて，そのときのポートフォリオの収益率の分散を σ_{pp}^* として求めると，(4.11)式となる。

$$\sigma_{pp}^* = \left(\mathbf{x}^*\right)^T \mathbf{V}_n \mathbf{x}^* = \frac{1}{D}\left(C\left(\mu_p^*\right)^2 - 2A\mu_p^* + B\right) \geq \frac{1}{C} \tag{4.11}$$

または，(4.11)式を書き換えると，(4.12)式の双曲線となり，(4.11)式あるいは(4.12)式を危険資産からなる効率的フロンティア（frontier portfolio）とよび，効率的フロンティアの右の実行可能領域を投資可能領域とよぶ。

$$\frac{\sigma_{pp}^*}{1/C} - \frac{\left(\mu_p^* - A/C\right)^2}{D/C^2} = 1 \tag{4.12}$$

(4.10)式より，μ_p^* は内生変数であることから，(4.12)式の σ_{pp}^* もまた内生変数である。また，(4.11)式あるいは(4.12)式より，危険資産からなる効率的フロンティアの収益率のボラティリティは点 $\left(\sigma_p^*, \mu_p^*\right) = \left(\sqrt{1/C}, A/C\right)$ で最小になり，このポートフォリオを最小分散ポートフォリオ（Minimum Variance Portfolio 略して MVP）とよぶ。

5. n 種類の危険資産の最適ポートフォリオ問題

つぎに，2 期間の期末富の期待効用極大化問題である(4.1)式を解く[6]。そ

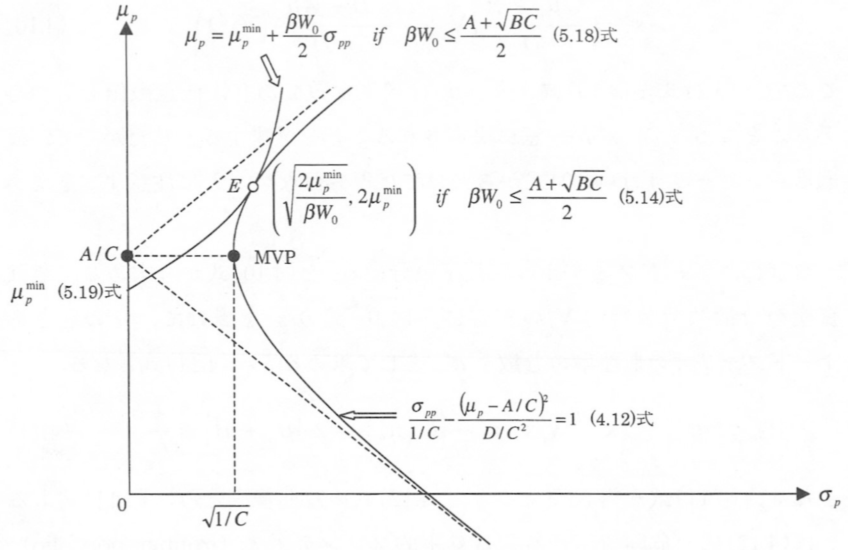

図1　危険資産からなる(σ_p, μ_p)上の最適ポートフォリオ$\left[\frac{D+\sqrt{F}}{2A} \le \beta W_0\text{ のケース}\right]$

のとき，(4.1)式を $\mathbf{x}$ で偏微分してゼロと置いて，$\mathbf{x}$ の最適値を $\mathbf{x}^{**}$ とした1階条件を整理すると，(5.1)式となる。

$$\mathbf{e} = \beta W_0 \mathbf{V}_n \mathbf{x}^{**} \tag{5.1}$$

(5.1)式より，$\mathbf{x}^{**}$ を解くと，(5.2)式となる。

$$\mathbf{x}^{**} = \frac{\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}}{\beta W_0} \tag{5.2}$$

つぎに，(5.1)式の両辺の左から$(\mathbf{x}^{**})^T$を掛けると，左辺は(5.3)式の1行目の式となり，右辺は(5.3)式の2行目の式となる。そのときのポートフォリオの期待収益率を μ_{pp}^{**} とすると，(5.3)式となる。

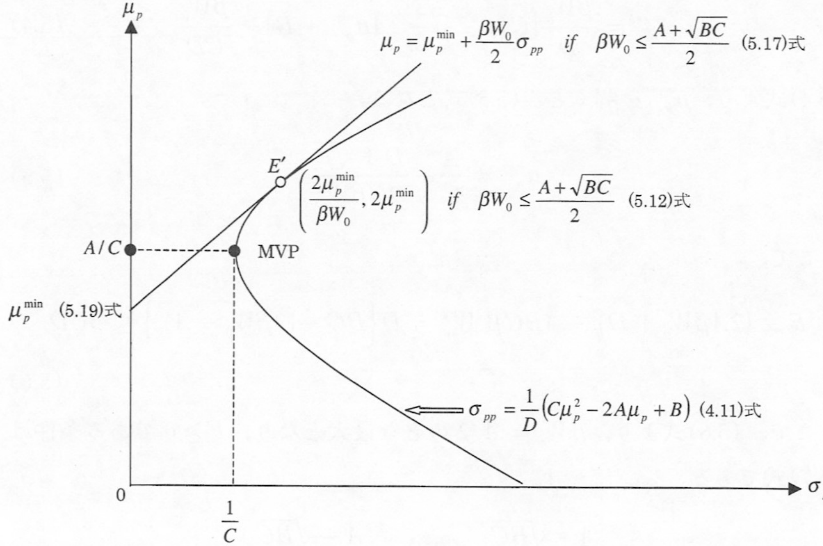

図2　危険資産からなる$\left(\sigma_{pp}, \mu_p\right)$上の最適ポートフォリオ$\left[\frac{D+\sqrt{F}}{2A} \le \beta W_0 \text{ のケース}\right]$

$$\begin{aligned} \mu_p^{**} &= \left(\mathbf{x}^{**}\right)^T \mathbf{e} \\ &= \beta W_0 \mathbf{x}^{**} \mathbf{V}_n \mathbf{x}^{**} = \beta W_0 \sigma_{pp}^{**} \end{aligned} \tag{5.3}$$

ここで，(5.1)式を満足するポートフォリオの収益率の分散をσ_{pp}^{**}で表すことにして，そのときのポートフォリオを期待効用極大化ポートフォリオとよぶことにする。

効率的フロンティアを表す(4.11)式と期待効用極大化ポートフォリオを表す(5.3)式の両条件を満足する最適ポートフォリオは(5.4)式を満足する。そのときの最適ポートフォリオの期待収益率をμ_p^{***}，最適ポートフォリオの収益率の分散をσ_{pp}^{***}として，(4.11)式を(5.3)式に代入すると，(5.4)式となる。

$$\mu_p^{***} = \frac{\beta W_0}{D}\left(C\left(\mu_p^{***}\right)^2 - 2A\mu_p^{***} + B\right) \geq \frac{\beta W_0}{CD} \tag{5.4}$$

(5.4)式より，μ_p^{***} を解くと，(5.5)式となる。

$$\mu_p^{***} = \frac{A}{C} + \frac{D \pm \sqrt{F}}{2C\beta W_0} \tag{5.5}$$

ここで，

$$F \equiv \left(2A\beta W_0 + D\right)^2 - 4BC\beta^2 W_0^2 = D\left\{BC - \left(2\beta W_0 - A\right)^2\right\} \leq BCD \tag{5.6}$$

ここで，(5.6)式より，$\beta W_0 = A/2$ のとき最大となり，$F \geq 0$ である条件は(5.7)式である。

$$\frac{A - \sqrt{BC}}{2} \leq \beta W_0 \leq \frac{A + \sqrt{BC}}{2} \tag{5.7}$$

ここで，(5.7)式と $D, \beta, W_0 > 0$ より，(5.8)式でなければならない。

Lemma 1

最適ポートフォリオが存在する必要条件は(2.2b)式と(3.4b)式と(5.8)式

$$\beta W_0 \leq \frac{A + \sqrt{BC}}{2} \tag{5.8}$$

である。ここで，期首の富 W_0 の単位を変更することによって，(5.8)式の関係式を成立させることができる。

［証明］ (5.8)式が成立しないときを考える。そこで，危険資産からなる効率的ポートフォリオを表す(4.11)式の期待収益率 μ_p^* と期待効用極大化ポートフォリオを表す(5.3)式の期待収益率 μ_p^{**} がともにMVPの期待収益率 A/C であるときの両ポートフォリオの収益率の分散の関係を考える。この

とき，$\sigma^{*}_{pp}\Big|_{\mu^{*}_{p}=A/C}>\sigma^{**}_{pp}\Big|_{\mu^{**}_{p}=A/C}$ であるならば，(4.11)式と(5.3)式は交わらず，最適ポートフォリオ $\left(\mu^{***}_{p},\sigma^{***}_{pp}\right)$ は存在しない。そこで，

$$\sigma^{*}_{pp}\Big|_{\mu^{*}_{p}=A/C}-\sigma^{**}_{pp}\Big|_{\mu^{**}_{p}=A/C}=\frac{1}{C}-\frac{A}{C\beta W_{0}}=\frac{\beta W_{0}-A}{C\beta W_{0}}>\frac{\sqrt{BC}-A}{C\beta W_{0}}>0 \tag{5.9}$$

ここで，(5.9)式の最初の不等式は $\beta W_{0}>\left(A+\sqrt{BC}\right)/2$ による。　Q.E.D.

(5.5)式の μ^{***}_{p} を(5.3)式の μ^{**}_{p} に代入して，σ^{***}_{pp} と σ^{***}_{p} を求めると，(5.8)式の条件の下で(5.10)式となる。

$$\sigma^{***}_{pp}=\frac{1}{\beta W_{0}}\left(\frac{A}{C}+\frac{D\pm\sqrt{F}}{2C\beta W_{0}}\right) \tag{5.10a}$$

$$\sigma^{***}_{p}=\sqrt{\frac{1}{\beta W_{0}}\left(\frac{A}{C}+\frac{D\pm\sqrt{F}}{2C\beta W_{0}}\right)} \tag{5.10b}$$

ここで，ボラティリティの定義より，$\sigma^{***}_{p}\geq 0$ であるので，$-\sqrt{\sigma^{***}_{pp}}$ は除外される。

つぎに，B, C, D, β, W_{0} と(5.8)式の条件の下で，期待効用を求めるため，(5.5)式と(5.10a)式を(3.7)式の σ_{pp} と μ_{p} に代入すると，(5.11)式となる。

$$\begin{aligned}&E\left[u_{e}\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=\frac{1}{\beta W_{0}}\left(\frac{A}{C}+\frac{D\pm\sqrt{F}}{2C\beta W_{0}}\right),\ \mu_{p}=\frac{A}{C}+\frac{D\pm\sqrt{F}}{2C\beta W_{0}}}\right]\\&=-\exp\left[-\beta W_{0}\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{C}+\frac{D\pm\sqrt{F}}{2C\beta W_{0}}\right)\right\}\right]+\varsigma\end{aligned} \tag{5.11}$$

(5.11)式より，(5.12)式の関係式が成立し，(5.8)式の条件の下で期待効用を極大化する最適ポートフォリオの期待効用は(5.12)式の左辺のケースで

ある[7]。

$$
\begin{aligned}
&E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=\frac{2\mu_p^{\min}}{\beta W_0},\ \mu_p=2\mu_p^{\min}}\right] \\
&\quad \geq E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=\frac{1}{\beta W_0}\left(\frac{A}{C}+\frac{D-\sqrt{F}}{2C\beta W_0}\right),\ \mu_p=\frac{A}{C}+\frac{D-\sqrt{F}}{2C\beta W_0}}\right]
\end{aligned}
\tag{5.12}
$$

ここで，

$$
\mu_p^{\min} \equiv \frac{1}{2}\left(\frac{A}{C}+\frac{D+\sqrt{F}}{2C\beta W_0}\right) \tag{5.13}
$$

とする。(5.11)式と(5.5)式と(5.10a)式または(5.10b)式より，最適ポートフォリオは(5.14)式あるいは(5.15)式となる。

Proposition 1

n 種類の危険資産から構成される効率的フロンティアと期待効用極大化ポートフォリオを満足する最適ポートフォリオは(2.2b)式と(3.4b)式と(4.8)式と(5.8)式を条件として，

$$
\left(\sigma_{pp}^{***},\ \mu_p^{***}\right)=\left(\frac{2\mu_p^{\min}}{\beta W_0},\ 2\mu_p^{\min}\right) \tag{5.14}
$$

であり，図 1 の点 E に位置する。または

$$
\left(\sigma_p^{***},\ \mu_p^{***}\right)=\left(\sqrt{\frac{2\mu_p^{\min}}{\beta W_0}},\ 2\mu_p^{\min}\right) \tag{5.15}
$$

であり，図 2 の点 E' に位置する。(5.14)式あるいは(5.15)式の最適ポートフォリオの期待収益率を(4.10)式に代入して，そのときの最適ポートフォリオの投資割合を $\mathbf{x}^{***}$ とすると，(5.8)式の条件の下で(5.16)式となる。

$$\mathbf{x}^{***} = 2\left(\frac{C\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right) - A\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right)}{D}\right)\mu_p^{\min} + \frac{B\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{1}\right) - A\left(\mathbf{V}_n^{-1}\mathbf{e}\right)}{D} \qquad (5.16)$$

さらに，(5.16)式を(3.4a)式の $\mathbf{x}$ に代入したときの期末富を $\widetilde{W}^{***}$ として，最適ポートフォリオで投資を行ったときの期待効用を求めるため，(5.14)式を(3.7)式の μ_p と σ_{pp} に代入して，そのときの最適ポートフォリオの期待効用値を $E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right]$ とすると，(5.17)式となる。

$$\begin{aligned} E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right] &\equiv E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=\frac{2\mu_p^{\min}}{\beta W_0},\ \mu_p=2\mu_p^{\min}}\right] \\ &= -\exp\left[-\beta W_0\left\{1+\frac{1}{2}\left(\frac{A}{C}+\frac{D+\sqrt{F}}{2C\beta W_0}\right)\right\}\right]+\varsigma \end{aligned} \qquad (5.17)$$

最後に，$\left(\sigma_{pp}, \mu_p\right)$ 上で最適ポートフォリオである(5.14)式を通る無差別効用曲線を求める。そこで，まず(5.8)式の条件の下で，(5.17)式の期待効用値が(3.7)式の期待効用関数に一致するときの関係を(5.18)式で表す。

$$E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right] = -\exp\left[-\beta W_0\left\{\left(1+\mu_p\right)-\frac{\beta W_0}{2}\sigma_{pp}\right\}\right]+\varsigma \qquad (5.18)$$

(5.18)式を μ_p について解くと，最適ポートフォリオを通る無差別効用曲線は(5.19)式となる。

$$\mu_p = \mu_p^{\min} + \frac{\beta W_0}{2}\sigma_{pp} \qquad (5.19)$$

Lemma 2

もし $\left(D+\sqrt{F}\right)/2A \leq \beta W_0$ なら，$\mu_p^{\min}$ は MVP の期待収益率に一致す

るか，あるいは下方に位置する。もし $\beta W_0 < \left(A + \sqrt{BC}\right)/2A$ なら，$\mu_p^{\min}$ はMVPの期待収益率の上方に位置する。図1と図2は前者のケースを示している。

［証明］ たとえば，$\mu_p^{\min}$ がMVPの期待収益率の下にあるケースを考える。そのとき，(5.19)式より，(5.20)式が成立する。

$$\mu_p^{\min} = \frac{1}{2}\left(\frac{A}{C} + \frac{D + \sqrt{F}}{2C\beta W_0}\right) < \frac{A}{C} \tag{5.20}$$

(5.20)式より，βW_0 について解くと，(5.21)式となる。

$$\frac{D + \sqrt{F}}{2A} < \beta W_0 \tag{5.21}$$

同様に，$\mu_p^{\min}$ が A/C と一致するケース，$\mu_p^{\min}$ が A/C の上方に位置するケースを証明することができる。 Q.E.D.

6. n 種類の危険資産と無危険資産からなるポートフォリオ

n 種類の危険資産と無危険資産からなるポートフォリオの収益率 $\tilde{r}_p$ は，(6.1)式となる。

$$\tilde{r}_p = \mathbf{x}^T\tilde{\mathbf{r}} + \left(1 - \mathbf{x}^T\mathbf{1}\right)r_f = r_f + \mathbf{x}^T\left(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{1}r_f\right) \tag{6.1}$$

ここで，r_f は無危険利子率を表し，$\mathbf{x}$ は n 種類の危険資産への投資割合の列ベクトルを表し，無危険資産への投資割合は全投資割合1から危険資産への投資割合の合計 $\mathbf{x}^T\mathbf{1}$ を差し引いた値である。また，(6.1)式より，ポートフォリオの収益率は無危険資産の収益率と危険資産の収益率の線形結合とな

ることを表している。(6.1)式の両辺の期待値をとって，ポートフォリオの期待収益率μ_pを求めると，(6.2)式となる。

$$\mu_p = r_f + \mathbf{x}^T \left(\mathbf{e} - \mathbf{1} r_f\right) \tag{6.2}$$

つぎに，W_0を正の期首の富とすると，期末富$\widetilde{W}$は(6.3a)式となる。

$$\widetilde{W} = \left(1 + \tilde{r}_p\right) W_0 = \left\{ r_f + \mathbf{x}^T \left(\tilde{\mathbf{r}} - \mathbf{1} r_f\right) \right\} W_0 \tag{6.3a}$$

$$W_0 > 0 \tag{6.3b}$$

ここで，期末富$\widetilde{W}$が正規分布に従うと仮定するとき，期末富$\widetilde{W}$は各危険資産の収益率の線形結合であるので，危険資産の収益率が多変量正規分布に従うことと整合的である。(6.3)式より，期末富の期待値$E[\widetilde{W}]$と期末富の分散σ_{WW}を各資産の期待収益率と危険資産の収益率の分散共分散で表すと(6.4)式と(3.6)式となる。

$$E\left[\widetilde{W}\right] = \left(1 + \mu_p\right) W_0 = r_f + \mathbf{x}^T \left(\mathbf{e} - \mathbf{1} r_f\right) W_0 \tag{6.4}$$

最後に，危険資産の収益率が多変量正規分布に従うときの指数型期待効用関数は，(6.4)式と(3.6)式を(2.4)式に代入することにより，(6.5)式となる。

$$\begin{aligned} E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\right] &= -\exp\left\{ -\beta W_0 \left(1 + \mu_p - \frac{\beta W_0 \sigma_{pp}}{2} \right) \right\} + \varsigma \\ &= -\exp\left[-\beta W_0 \left\{ r_f + \mathbf{x}^T \left(\mathbf{e} - \mathbf{1} r_f\right) - \frac{\beta W_0}{2} \mathbf{x}^T \mathbf{V}_n \mathbf{x} \right\} \right] + \varsigma \end{aligned} \tag{6.5}$$

7. n種類の危険資産と無危険資産の効率的フロンティア

n種類の危険資産と無危険資産から構成されるポートフォリオの収益率の

分散の最小化問題の下で，2 期間の期末富の期待効用極大化問題から得られる最適ポートフォリオを求める。

$$\max_{\mathbf{x}} E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\right] = -\exp\left[-\beta W_0\left\{r_f + \mathbf{x}^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) - \frac{\beta W_0}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x}\right\}\right] + \varsigma \tag{7.1}$$

subject to

$$\min_{\mathbf{x}} \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x} \tag{4.2}$$

$$\mu_p = r_f + \mathbf{x}^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) \tag{6.2}$$

ここで，(7.1)式が期待効用極大化問題であり，(4.2)式と(6.2)式がポートフォリオの収益率の分散の最小化問題としての定式である。$\mu_p \leq r_f$ ならば，絶対的危険回避型投資家は最適投資行動として，すべての期首の富 W_0 を無危険資産に投資することから，$\sigma_{pp} = 0$ となる。

まず，ポートフォリオの収益率の分散の最小化問題を解くことにする。ラグランジュ乗数をλとして，ラグランジュ式をLとすると，(4.2)式と(6.2)式を(7.2)式に書き直すことができる。

$$\min_{\{\mathbf{x},\lambda_1,\lambda_2\}} L = \frac{1}{2}\mathbf{x}^T\mathbf{V}_n\mathbf{x} + \lambda\left\{\mu_p - r_f - \mathbf{x}^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)\right\} \tag{7.2}$$

危険資産と無危険資産からなるポートフォリオの分散を最小にする n 種類の危険資産への投資割合 $\mathbf{x}$ と λ でそれぞれ偏微分してゼロと置いて，$\mathbf{x}$ の最適値を $\mathbf{x}^*$，λ の最適値を λ^* とした(7.2)式の 1 階条件は(7.3)式となり，最適値 $\mathbf{x}^*$ を(6.2)式に代入したポートフォリオの期待収益率を μ_p^* とする。

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \mathbf{x}}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} = \mathbf{V}_n\mathbf{x}^* - \lambda^*\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) = \mathbf{0} \tag{7.3a}$$

$$\left.\frac{\partial L}{\partial \lambda}\right|_{\mathbf{x}=\mathbf{x}^*,\lambda=\lambda^*} = \mu_p^* - \left(\mathbf{x}^*\right)^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) = 0 \tag{7.3b}$$

(7.3a)式から $\mathbf{x}^*$ を解くと，(7.4)式となる。

$$\mathbf{x}^* = \lambda^* \mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) \tag{7.4}$$

(7.4)式の両辺に $\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T$ を左から掛けて，r_f を加えると，左辺は(7.5)式の 1 行目の式となり，右辺は(7.5)式の 2 行目の式となる。

$$\begin{aligned} \mu_p^* &= r_f + \left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T \mathbf{x} = r_f + \mathbf{x}^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T \\ &= r_f + \lambda^*\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T \mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T = r_f + \lambda^* B_f \end{aligned} \tag{7.5}$$

ここで，

$$B_f \equiv \left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)^T \mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) = Cr_f^2 - 2Ar_f + B \geq \frac{D}{C} \tag{7.6}$$

ここで，(7.6)式の最後の不等号は(4.8)式より自明である。(7.5)式より，λ^* を解くと，(7.7)式となる。

$$\lambda^* = \frac{\mu_p^* - r_f}{B_f} \tag{7.7}$$

(7.7)式を(7.4)式に代入すると，ポートフォリオの収益率の分散を最小にする危険資産への投資割合 $\mathbf{x}^*$ は(7.8)式となる。

$$\mathbf{x}^* = \frac{\left(\mu_p^* - r_f\right)\mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)}{B_f} \tag{7.8}$$

また，(7.8)式より，無危険資産への投資割合は(7.9)式となる。

$$1 - \mathbf{1}^T \mathbf{x}^* = 1 - \frac{\left(A - Cr_f\right)\left(\mu_p^* - r_f\right)}{B_f} \tag{7.9}$$

ここで，(6.2)式と(7.8)式より，μ_p は内生変数であり，任意の値を一つ与えることによって，$\mathbf{x}^*$ が一意に決定されることを意味する。したがって，最適ポートフォリオは(7.8)式からだけでは得られないことに注意すべきである。

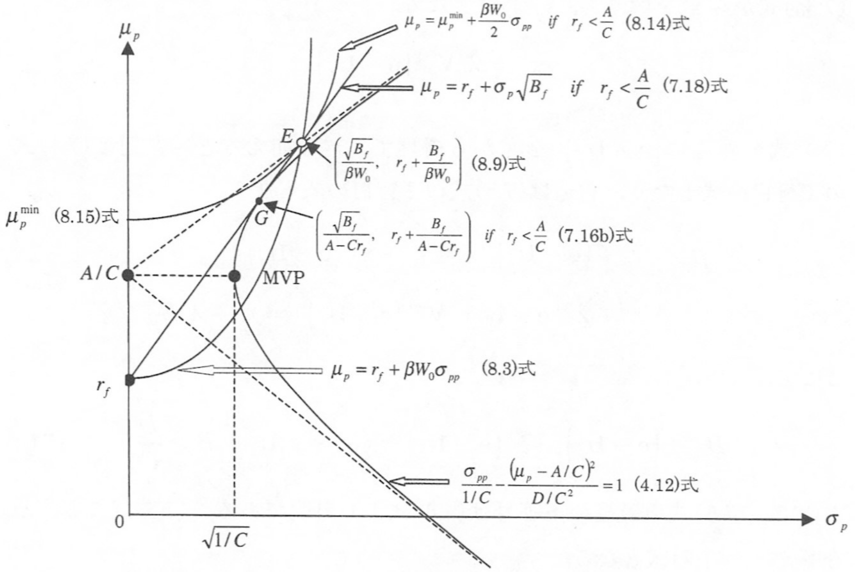

図3　無危険資産を含む(σ_p, μ_p)上の最適ポートフォリオ$\left[r_f < A/C\right.$ のケース$\left.\right]$

つぎに，ポートフォリオの収益率の分散σ_{pp}を(7.8)式から求める。危険資産の分散共分散行列$\mathbf{V}_n$の左右に，(7.8)式の$\mathbf{x}^*$を掛けて，そのときのポートフォリオの収益率の分散をσ_{pp}^*として求めると，(7.10)式となる。

$$\sigma_{pp}^* = \left(\mathbf{x}^*\right)\mathbf{V}_n\mathbf{x}^* = \frac{\left(\mu_p^* - r_f\right)^2}{B_f} \leq \frac{C\left(\mu_p - r_f\right)^2}{D} \tag{7.10}$$

つぎに，(7.10)式で表されるn種類の危険資産と無危険資産を含む効率的フロンティアと(4.11)式あるいは(4.12)式のn種類の危険資産からなる効率的フロンティアとの関係を求めて，絶対的危険回避型投資家の最適投資行動として，無危険資産への投資割合とパラメータの関係を確認する。

そこで，無危険資産を含む効率的フロンティアを求めた(7.10)式と(4.11)

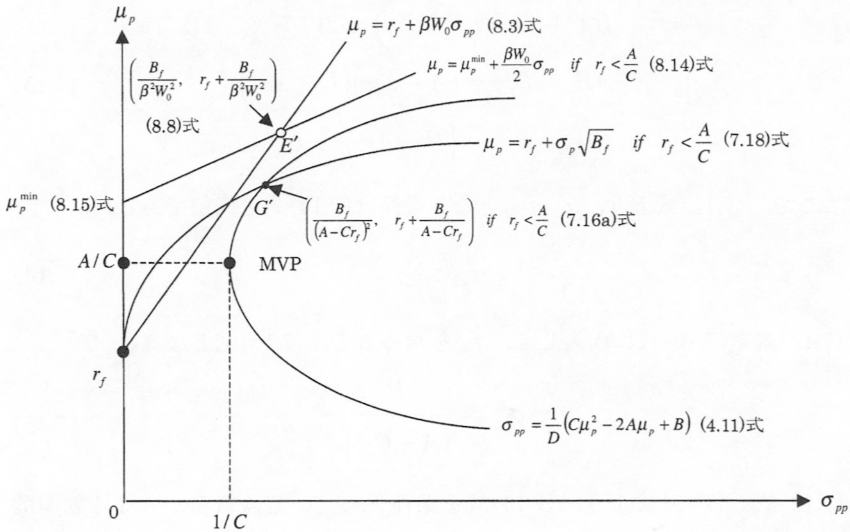

図 4　無危険資産を含む $\left(\sigma_{pp}, \mu_p\right)$ 上の最適ポートフォリオ $\left[r_f < A/C\right.$ のケース$\left.\right]$

式の危険資産からなる効率的フロンティアの交点を求めるため，(7.11)式を設定する。

$$\frac{\left(\mu_p - r_f\right)^2}{B_f} = \frac{1}{D}\left(C\left(\mu_p^*\right)^2 - 2A\mu_p + B\right) \tag{7.11}$$

(7.11)式を μ_p について解くと，(7.12)式のような重根となる。すなわち，図 3 の点 G で接し，また図 4 の点 G' で交わる。

$$\mu_p = \frac{B - Ar_f}{A - Cr_f} = r_f + \frac{B_f}{A - Cr_f} \tag{7.12}$$

ここで，(7.12)式の μ_p を求めるため，(4.8)式の $D \equiv BC - A^2$ と(7.6)式から(7.13)式の関係を使用した。

$$
\begin{aligned}
B_f C - D &= \left(A - Cr_f\right)^2 > 0 \\
AB_f - Dr_f &= \left(A - Cr_f\right)\left(B - Ar_f\right) \\
BB_f - Dr_f^2 &= \left(B - Ar_f\right)^2 > 0
\end{aligned}
\tag{7.13}
$$

ここで，(7.12)式より，$\mu_p^* > r_f$ となる条件は(7.14)式と同値である。

$$
r_f < \frac{A}{C} \tag{7.14}
$$

(7.12)式を(7.10)式に代入して，σ_{pp}^* を求めると，(7.15)式となる。

$$
\sigma_{pp}^* = \frac{B_f}{\left(A - Cr_f\right)^2} \tag{7.15}
$$

(7.12)式と(7.15)式より，(7.14)式を条件として，危険資産からなる効率的フロンティアと無危険資産を含む効率的フロンティアは図 3 の点 G で接するか，あるいは図 4 の点 G' で交わり，その点は(7.16)式である。

$$
\left(\sigma_{pp}^*,\ \mu_p^*\right) = \left(\frac{B_f}{\left(A - Cr_f\right)^2},\ r_f + \frac{B_f}{A - Cr_f}\right) \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \tag{7.16a}
$$

$$
\left(\sigma_p^*,\ \mu_p^*\right) = \left(\frac{\sqrt{B_f}}{A - Cr_f},\ r_f + \frac{B_f}{A - Cr_f}\right) \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \tag{7.16b}
$$

ここで，(7.16a)式より，無危険資産を含む効率的フロンティと危険資産からなる効率的フロンティアが接することになり，このポートフォリオを接点ポートフォリオ（tangency portfolio）とよぶ。この点で，すべての投資家が各危険資産にたいして，同じ期待収益率と同じ分散共分散を有している限り，危険資産だけから構成される接点ポートフォリオでの各危険資産への投資割合は，あらゆる選好を有する投資家にとっても同じとなる，という分離定理が成立する。すなわち，接点ポートフォリオでは投資家の期待効用関数

(2.4)式の絶対的危険回避パラメータ β とは無関係となる。

(7.10)式の最後の不等号は(7.6)式から自明である。または，ボラティリティの定義と(7.9)式より，ポートフォリオの収益率のボラティリティ σ_p^* を求めると，(7.17)式となる。

$$\sigma_p^* = \frac{\left|\mu_p^* - r_f\right|}{\sqrt{B_f}} \leq \left|\mu_p - r_f\right|\sqrt{\frac{C}{D}} \tag{7.17}$$

ここで，(7.10)式あるいは(7.17)式は無危険資産を含むポートフォリオの効率的フロンティアであり，効率的フロンティアの右の実行可能領域を投資可能領域とよぶ。(7.17)式より，無危険資産を含むポートフォリオの効率的フロンティアは(7.18)式となる[8)]。

$$\mu_p^* = r_f + \sigma_p^*\sqrt{B_f} \geq r_f + \sigma_p^*\sqrt{\frac{C}{D}} \tag{7.18}$$

ここで，条件式は(7.14)式に従う。

8. n 種類の危険資産と無危険資産の最適ポートフォリオ問題

つぎに，2期間の期末富の期待効用極大化問題である(7.1)式を解く[9)]。そのとき，(7.1)式を $\mathbf{x}$ でそれぞれ偏微分してゼロと置いて，$\mathbf{x}$ の最適値を $\mathbf{x}^{**}$ とした1階条件を整理すると，(8.1)式となる。

$$\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f = \beta W_0 \mathbf{V}_n \mathbf{x}^{**} \tag{8.1}$$

(8.1)式より，$\mathbf{x}^{**}$ を解くと，(8.2)式となる。

$$\mathbf{x}^{**} = \frac{\mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)}{\beta W_0} \tag{8.2}$$

(8.1)式の両辺に左から$\left(\mathbf{x}^{**}\right)^T$を掛けて，両辺に$r_f$を加えると，左辺は(8.3)式の1番目の式となり，右辺は(8.3)式の2番目の式となる。そのときのポートフォリオの期待収益率をμ_p^{**}とすると，(8.3)式となる。

$$\begin{aligned}\mu_p^{**} &= r_f + \left(\mathbf{x}^{**}\right)^T\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right) \\ &= r_f + \beta W_0\left(\mathbf{x}^{**}\right)^T \mathbf{V}_n\mathbf{x}^{**} = r_f + \beta W_0\sigma_{pp}^{**} \geq r_f\end{aligned} \tag{8.3}$$

ここで，(8.3)式を満足するポートフォリオの収益率の分散をσ_{pp}^{**}で表すことにして，そのときのポートフォリオを，無危険資産を含む期待効用極大化ポートフォリオとよぶことにする。

効率的フロンティアと無危険資産を含む期待効用極大化ポートフォリオの両条件を満足する最適ポートフォリオを考える。そのとき，最適ポートフォリオの収益率のボラティリティをσ_p^{***}として，(7.12)式と(8.3)式より，(8.4)式となる。

$$r_f + \sigma_p^{***}\sqrt{B_f} = r_f + \beta W_0\sigma_{pp}^{***} \quad if \quad r_f < A/C \tag{8.4}$$

ここで(8.4)式から求められるσ_p^{***}を(7.12)式のσ_p^{*}あるいは(8.3)式のσ_p^{**}に代入して，求められるポートフォリオの期待収益率を最適ポートフォリオの期待収益率μ_{pp}^{***}として求めると，(8.5)式または(8.6)式となる[10)]。

$$\left(\sigma_{pp}^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \left(\sigma_p^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \left(0,\ r_f\right) \tag{8.5}$$

または，(7.14)式の条件の下で，

$$\left(\sigma_{pp}^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \left(\frac{B_f}{\beta^2 W_0^2},\ r_f + \frac{B_f}{\beta W_0}\right) \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \tag{8.6a}$$

$$\left(\sigma_p^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \left(\frac{\sqrt{B_f}}{\beta W_0},\ r_f + \frac{B_f}{\beta W_0}\right) \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \tag{8.6b}$$

である。ここで，(8.5)式あるいは(8.5)式と(8.6)式の両ケースを結ぶ直線が無危険資産を含む効率的フロンティアである(7.12)式となることが確認できる。

つぎに，$B, C, D, \beta, W_0 > 0$ と(7.6)式と(7.14)式の条件の下で，(8.5)式と(8.6a)式を(6.5)式の σ_{pp} と μ_p に代入したときの期待効用の関係は，(8.7)式である。

$$E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=0,\ \mu_p=r_f}\right] < E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Bigg|_{\sigma_{pp}=\frac{B_f}{\beta^2 W_0^2},\ \mu_p=r_f+\frac{B_f}{\beta W_0}}\right] \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \tag{8.7}$$

ここで，期待効用を極大化する最適ポートフォリオの期待効用は(8.7)式の右辺のケースであり，最適ポートフォリオは(8.8)式あるいは(8.9)式となる。

Proposition 2

n 種類の危険資産と無危険資産から構成される効率的フロンティアと期待効用極大化ポートフォリオを満足する最適ポートフォリオは(2.2b)式と(3.4b)式と(4.8)式と(7.6)式と(7.14)式を条件として，

$$\left(\sigma_{pp}^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{B_f}{\beta^2 W_0^2},\ r_f + \dfrac{B_f}{\beta W_0}\right) & if \quad r_f < \dfrac{A}{C} \\ \left(0,\ r_f\right) & \text{その他} \end{cases} \tag{8.8}$$

であり，図3の点 E に位置する。または

$$\left(\sigma_p^{***},\ \mu_p^{***}\right) = \begin{cases} \left(\dfrac{\sqrt{B_f}}{\beta W_0},\ r_f + \dfrac{B_f}{\beta W_0}\right) & if \quad r_f < \dfrac{A}{C} \\ \left(0,\ r_f\right) & \text{その他} \end{cases} \tag{8.9}$$

であり，図4の点E'に位置する。(8.8)式あるいは(8.9)式のμ_p^{***}を(7.8)式のμ_p^{*}に代入して，そのときの最適ポートフォリオの投資割合を$\mathbf{x}^{***}$とすると，(8.10)式となる。

$$\mathbf{x}^{***} = \frac{\mathbf{V}_n^{-1}\left(\mathbf{e} - \mathbf{1}r_f\right)}{\beta W_0} \tag{8.10}$$

また，無危険資産への投資割合は(7.10)式と(8.8)式より，(8.11)式となる。

$$1 - \frac{A - Cr_f}{\beta W_0} \tag{8.11}$$

(8.11)式より，絶対的危険回避型投資家は最適投資行動として，$\beta W_0 > A - Cr_f$なら貸付けを行い（言い換えれば，無危険資産へ投資を行い），残りの金額を(8.10)式にしたがって危険資産に投資する。また，$\beta W_0 < A - Cr_f$なら借入れを行って（言い換えれば，無危険資産の空売りを行い），その金額と期首の富W_0を危険資産へ投資し，$\beta W_0 = A - Cr_f$なら危険資産のみに全額を投資することを意味する。すなわち，絶対的危険回避型投資家の危険回避パラメータβが増加するほど，貸付けに向きやすいという，自明のことを物語っている。もし借入れが不可能であるような場合には，投資家の効率的フロンティアはr_fから接点ポートフォリオを通り，接点ポートフォリオの右側では危険資産だけからなる効率的フロンティアとなる。さらに，(8.10)式を(6.3a)式の$\mathbf{x}$に代入したときの期末の富を$\widetilde{W}^{***}$として，最適ポートフォリオで投資を行ったときの期待効用を求めるため，(8.8)式を(6.5)式のμ_pとσ_{pp}に代入し，そのときの最適ポートフォリオの期待効用値を$E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right]$とすると，(7.14)式の条件の下で(8.12)式となる。

$$E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right] \equiv E\left[u_e\left(\widetilde{W}\right)\Big|_{\sigma_{pp}=\frac{B_f}{\beta^2 W_0^2},\ \mu_p = r_f + \frac{B_f}{\beta W_0}}\right]$$
$$= -\exp\left\{-\beta W_0\left(1 + r_f + \frac{B_f}{2\beta W_0}\right)\right\} + \varsigma \quad if \quad r_f < \frac{A}{C}$$
(8.12)

最後に，$\left(\sigma_{pp}, \mu_p\right)$上で最適ポートフォリオである(8.8)式を通る無差別効用曲線を求める。そこで，まず(8.12)式の期待効用値が(6.5)式の期待効用関数に一致するときの関係を(8.13)式で表す。

$$E\left[u_e\left(\widetilde{W}^{***}\right)\right] = -\exp\left\{-\beta W_0\left(1 + \mu_p - \frac{\beta W_0 \sigma_{pp}}{2}\right)\right\} + \varsigma \quad (8.13)$$

(8.13)式をμ_pについて解くと，最適ポートフォリオを通る無差別効用曲線は(7.14)式の条件の下で(8.14)式となる。

$$\mu_p = \mu_p^{\min} + \frac{\beta W_0}{2}\sigma_{pp} \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \quad (8.14)$$

ここで，

$$\mu_p^{\min} \equiv r_f + \frac{B_f}{2\beta W_0} \geq r_f + \frac{D}{2C\beta W_0} \quad if \quad r_f < \frac{A}{C} \quad (8.15)$$

である。

9. おわりに

これまで，最適ポートフォリオ問題として，ポートフォリオの収益率の分散の最小化問題と期待効用極大化問題として独立に想定されてきたが，両問

題を結びつける方法が，明確にされてこなかった。単に，危険資産の収益率の多変量正規分布（多変量ガウス分布）を仮定すれば，両問題を融合できる，という文言で片付けられるか，あるいは，数値例を使用して，解説されるだけであった。

そこで，本稿では，HARA 型効用関数のパラメータの極限操作によって導出した指数型期待効用関数を使って，n 種類の危険資産のケースとそれに無危険資産を加えた両ケースで，ポートフォリオの収益率の分散の最小化問題と指数型期待効用極大化問題の融合を試みた。その結果，絶対的危険回避型投資家が最適ポートフォリオを組む場合に，危険回避パラメータと収益率と収益率の分散共分散のパラメータの大小関係によって，明確に貸出あるいは借入れを行うかが決定されることを示した。

しかし，本稿では，最小分散ポートフォリオ（MVP）の期待収益率が無危険利子率よりも大きく，かつ無危険利子率で借入れが有限に可能であり，無危険資産の空売りが可能なケースを想定したが，貸付けのみが可能であるケースや，貸付けと借入れの無危険利子率が異なっているケースなども想定できる。またの機会にこうしたケースとともに，数値例を挙げて考察したい。また，項数を考慮して，最小分散ポートフォリオの期待収益率が無危険利子率以下のケースは脚注で補うにとどめた。

〔注〕

1）Ingersoll [1] は p. 55 で，HARA 型効用関数を次式で表現しているが，Ingersoll の HARA 型効用関数では，厳密には対数型効用関数を導出することはできない。

$$u(W)=\frac{1-\gamma}{\gamma}\left(\frac{\beta W}{1-\gamma}+\eta\right)^{\gamma}$$

Ingersoll の効用関数から対数型効用関数を導出するには，上式の両辺に $(\gamma-1)/\gamma$ を加えて，改めて，効用関数を再定義した上で，$\gamma\to 0$ とする極限処理をしなければならない。しかしながら，拙稿 [5] と本稿で提示する(2.2a)式では，Ingersoll の HARA 型効用関数のように $(\gamma-1)/\gamma$ を加える必要はない。

2）ここで，$\gamma = 1$のとき $d^2u\left(\widetilde{W}\right)/d\tilde{W}^2 = 0$ であるので除外される。

3）ここで，L'Hospital の公式を使用する。

4）すなわち，$\lim_{\gamma \to 0}\left[u(W)\Big|_{\xi=-1}\right] = \log(\beta W + \eta)$ である。ここで，L'Hospital の公式を使用する。

5）危険資産は同一の期待収益率を有しないと仮定する。仮に，危険資産の期待収益率が同値であるなら，危険資産の収益率の分散共分散行列は正値定符号行列とはならない。また，$\mathbf{V}_n$ は $n \times n$ 正値定符号行列であれば，$\mathbf{V}_n^{-1}$ は $n \times n$ 正値定符号行列でもある。

6）(4.1)式の最適値は $\beta W_0\left(1 + \mu_p - \beta W_0 \sigma_{pp}/2\right)$ を極大化する最適値と同じである。

7）等号が成立するのは(5.6)式の F がゼロの $\beta W_0 = \left(A + \sqrt{BC}\right)/2$ のときである。

8）もし $\mu_p^* \leq r_f$ ならば，(7.17)式で無危険資産を含むポートフォリオの効率的フロンティアは $\mu_p^* = r_f - \sigma_p\sqrt{B_f}$ であるが，以下では $\mu_p^* > r_p$ のケースのみを考察する。

9）(4.1)式の最適値は $\beta W_0\left(1 + \mu_p - \beta W_0 \sigma_{pp}/2\right)$ を極大化する最適値と同じである。

10）(8.5)式は最適ポートフォリオの期待収益率 μ_p^{***} と無危険利子率 r_f に関係なく成立するが，(8.6)式は $\mu_p^{***} \leq r_f$ のケースでは不要である。

〔参考文献〕

[1] Ingersoll, J. E. Jr. *'Theory of Financial Decision Making,'* Rowman & Little field, New Jersey, 1987.

[2] Hung, C. and R. H. Litzenberger, *'Foundations for Financial Economics,'* North-Holland, New York, 1988.

[3] 飯原慶雄，「第 4 章 多期間ポートフォリオ分析」，『財務理論の研究—— CAPM をめぐる諸問題——』，白桃書房，昭和 55 年.

[4] 國村道雄，飯原慶雄，(名古屋証券取引所監修)『第 6 章 ファイナンスの理論』，「株式市場とオプション取引」，中央経済社，平成元年.

[5] 中川裕司，「拡張 HARA 型効用関数下での賃金所得を含む連続時間最適消費・ポートフォリオ選択問題の解法」，奈良県立商科大学『研究季報』第 3 巻第 4 号，1993 年.